ЗОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА
9 КЛАСС 1993 г.
Условия задач.

9. Человек, рост которого равен h, идет по краю тротуара с постоянной скоростью υ. На расстоянии l от края тротуара стоит фонарный столб, на самом верху которого горит фонарь. Высота столба равна H (см. рис. 57). Нарисуйте график зависимости скорости движения по тротуару тени головы человека от координаты x. Поверхность тротуара горизонтальна, а его край представляет собой прямую линию.

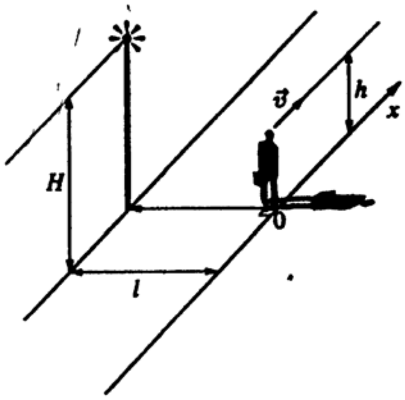

Рис.57

10. Для участия в Технической Олимпиаде Баренцева моря по подводному плаванию Чебурашка изготовил модель крокодила Гены. Однако модель оказалась слишком тяжелой и тонула в воде. Чебурашка прикрепил к ней несколько герметичных полиэтиленовых пакетов с воздухом. Оказалось, что в Баренцевом море, где плотность воды ρ_c = 1050 кг/м^3, при погружении на глубину, не превышающую критической величины h_c = 7 м, модель всплывает, а при погружении на большую глубину тонет. В устье реки Печоры, где плотность воды равна $\rho_П$ = 1000 кг/м^3, критическая глубина погружения модели крокодила составила всего $h_П$ = 1 м. Найдите , плотность модели крокодила Гены.

Примечание: Для воздуха применим закон Бойля-Мариотта. Для постоянного количества газа при неизменной температуре произведение давления газа (P) на занимаемый им объем (V) постоянно: PV = const.

11. На прямолинейном горизонтальном участке железной дороги стоит вагонетка с ценным грузом. Ночью к ней подкрался похититель. В качестве вспомогательного орудия злоумышленник решил применить невесомый упругий шнур; привязав один конец этого шнура к вагонетке, а второй – к себе, он побежал вдоль железнодорожного полотна с постоянной скоростью v_0 (см. рис. 58). Через некоторое время похититель очнулся, лежа на вагонетке, которая двигалась со скоростью $v_1 = 1{,}8v_0$. Чему равна масса вагонетки с грузом, если масса похитителя m = 80 кг? Трением качения можно пренебречь, а трение между ботинками и землей достаточно велико. Опишите, каким образом злоумышленник оказался на вагонетке.

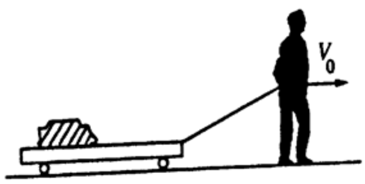

Рис.58

12. Крокодил Гена купил в подарок Чебурашке электрический утюг без терморегулятора, рассчитанный на включение в сеть с напряжением 220 В. Собираясь в гости на день рождение, он решил проверить подарок и погладить рубашку. Однако напряжение в сети у него дома равно 127 В, поэтому утюг нагрелся всего до 127 °С, тогда как для глажения рубашки необходима температура утюга в пределах от 200°С до 300°С. Сможет ли Гена погладить этим утюгом рубашку дома у Чебурашке, где напряжение сети равно 220 В? Если нет, то почему? Если да, то каким образом? Теплоотдача пропорциональна разности температур, а нагреватель утюга содержит всего одну обмотку, сопротивление которой можно считать постоянным. Температура воздуха в комнате равна 20 °С.

Всероссийская олимпиада
9 КЛАСС 1993 г.
Условия задач.

13. Камень, брошенный под утлом α к горизонту со скоростью v_0, летит по параболической траектории. По той же траектории с постоянной скоростью v_0 летит птица. Чему равно ее ускорение в верхней точке траектория?

14. Массивная доска AB скользит со скоростью u по гладкой горизонтальной поверхности. Из точки C на той же поверхности одновременно вылетают две легкие шайбы. Первая шайба скользит по поверхности в направлении CC_1 параллельно доске AB со скоростью v_1, вторая скользит со скоростью v_2 под углом α к CC_1 (см. рис. 131). Через некоторое время шайбы сталкиваются в точке D. Определите скорости шайб v_1 и v_2 до столкновения, если известно, что время от начала движения шайб до их столкновения в n раз превышает время от начала движения шайб до столкновения второй шайбы с доской. При ударе шайбы о доску потерь энергии на тепло и неупругие деформации не происходит.

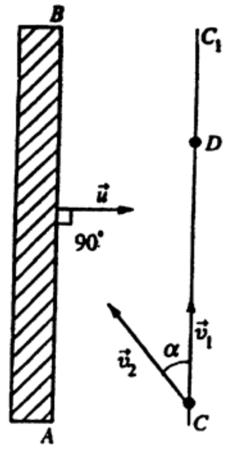

Рис.131

15. В термос с водой, имеющей температуру t = 40 °С, опускают бутылочку с детским питанием. Там бутылочка нагревается до температуры t_1 = 36 °С, затем ее вынимают и в термос опускают другую точно такую же бутылочку. До какой температуры она нагреется? Перед погружением в термос обе бутылочки имели температуру t_0 = 18 °С.

16. Лампа, соединенная последовательно с резистором сопротивление которого R = 10 Ом, подключена к сети. Зависимость силы тока от напряжения на лампе представлена на рис. 132. При каком напряжении сети КПД схемы η = 25 %? КПД схемы называют отношение мощности, потребляемой лампой, к мощности, потребляемой от сети.

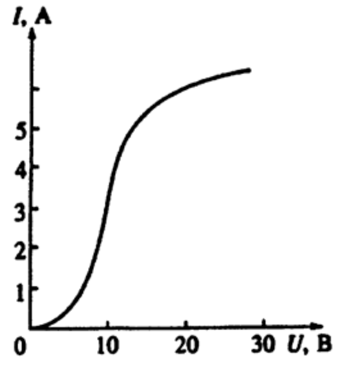

Рис.132

Решения задач.

Решение 9. Заметим, что треугольник ФСТ$_1$ и Г$_1$Н$_1$Т$_1$ (т. е. «фонарь – основание фонарного столба – тень головы» и «голова – ноги – тень головы») всегда подобны (рис. 9). Голову человека и ее тень условно считаем точками. Из этого легко получить, что тень головы движется по прямой, параллельной краю тротуара и находящейся на расстоянии L от столба. А это означает, что расстояние T_1T_2 всегда L/l раз больше рас-

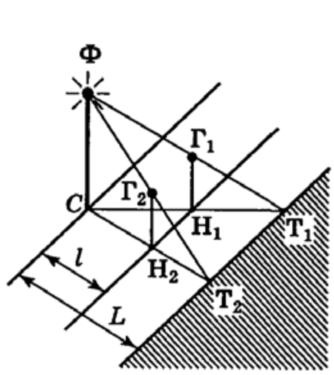

Рис. 9

стояния H_1H_2. Следовательно, скорость u тени головы человека в эти же L/l раз больше скорости самого человека v:

$$u = \frac{L}{l}v.$$

Из подобия треугольников ФСТ и ГНТ находим:

$$\frac{L}{H} = (L-l)h, \quad \frac{L}{l} = \frac{H}{H-h}.$$

Таким образом, скорость u тени головы человека не зависит от расстояния x и равна

$$u = \frac{vH}{H-h}.$$

График приведен на рисунке 10.

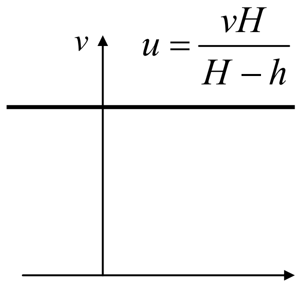

Рис. 10

Решение 10. Критическая глубина погружения модели крокодила соответствует положению неустойчивого равновесия; сила тяжести уравновешивается выталкивающей силой, действующей на суммарный объем модели и пакетов с воздухом. Обозначив через M, $\rho_м$, $V_м$ массу, плотность и объем модели крокодила, через $V_о$, V_c и V_n – объемы воздуха в полиэтиленовых пакетах соответственно над водой и при погружении на критическую глубину в морской и речной воде, а через $p_о$ – атмосферное давление, запишем:

$$Mg = \rho_c(V_м + V_c)g \quad (1)$$

в морской воде;

$$Mg = \rho_n(V_м + V_n)g \quad (1^/)$$

в речной воде.

При погружении объем воздуха в полиэтиленовых пакетах уменьшается, причем согласно закону Бойля – Мариотта

$$p_oV_o = (p_o + \rho_c g h_c)V_c, \quad (2)$$

$$p_oV_o = (p_o + \rho_n g h_n)V_n, \quad (2^/)$$

Эти две системы уравнений, которые нам понадобятся. Произведем преобразования уравнений (1) и ($1^/$):

$$\rho_м V_м = \rho_c(V_м + V_c) \quad (3)$$

в морской воде,

$$\rho_м V_м = \rho_n(V_м + V_n) \quad (3^/)$$

в речной воде,

$$\rho_c V_c = V_м(\rho_м - \rho_c) \quad (4)$$

в морской воде,

$$\rho_n V_n = V_м(\rho_м - \rho_n) \quad (4^/)$$

в речной воде.

Из последних двух уравнений находим

$$\frac{\rho_c V_c}{\rho_n V_n} = \frac{\rho_м - \rho_c}{\rho_м - \rho_n}.$$

Взяв величину $\frac{V_c}{V_n}$ из уравнений (2) и ($2^/$), имеем

$$\rho_c\left(p_o+\rho_n g h_n\right)\left(\rho_м-\rho_n\right)=\rho_n\left(p_o+\rho_c g h_c\right)\left(\rho_м-\rho_c\right),$$
откуда после преобразований получаем
$$\rho_м=\frac{h_c\rho_c-h_n\rho_n}{h_c-h_n-\left(\dfrac{p_o}{\rho_c\rho_n g}\right)\left(\rho_c-\rho_n\right)}\approx 1150\ \text{кг/м}^3.$$

Решение 11. Рассмотрим движение вагонетки в системе отсчета, связанной с бегущим человеком: благодаря наличию упругого шнура движение описывается уравнением для гармонического колебания и скорость вагонетки изменяется от $-v_0$ до $+v_0$. В неподвижной системе отсчета скорость вагонетки возрастает от нуля до $2v_0$ (в момент уменьшения силы натяжения шнура до нуля), после чего вагонетка продолжает двигаться со скоростью $2v_0$ вплоть до неупругого столкновения с похитителем. В результате этого столкновения похититель оказывается на вагонетке (и теряет сознание). Из закона сохранения импульса при столкновении

$M2v_o+mv_o=1{,}8(m+M)v_o$ получаем $M = 4m = 320$ кг.

Решение 12. Обозначим через R сопротивление обмотки утюга, через α – коэффициент теплоотдачи в окружающую среду. Если утюг включен в сеть дома у Гены, то уравнение теплового равновесия имеет вид
$$\frac{U_1^2}{R}=\alpha(t_1-t_o).$$
Если утюг включен в сеть у Чебурашки, то
$$\frac{U_2^2}{R}=\alpha(t_2-t_o).$$
Из этих уравнений легко получить
$$t_2=t_o+\frac{U_2^2}{U_1^2}(t_1-t_o)=341\ ^{\circ}\text{C}.$$
Таким образом, если утюг включен в сеть 220 В, то гладить им рубашку нельзя – температура утюга слишком высока. Однако способ выгладить рубашку существует: надо во время глажения попеременно включать и выключать утюг.

Примечание. Можно легко оценить, какую часть времени X утюг должен быть включен в сеть, если необходима температура t_3:
$$\frac{XU_2^2}{R}=\alpha(t_3-t_o);\ X=\frac{t_3-t_o}{t_2-t_o}\Rightarrow X=\frac{U_1^2}{U_2^2}\frac{t_3-t_o}{t_1-t_o}.$$
Например, для температуры $t_3 = 300$ °С получаем $X = 280/341$.

Решение 13. Пусть R – радиус кривизны траектории в верхней точке (рис. 11); находим $R=\dfrac{\left(v_o\cos\alpha\right)^2}{g}$.

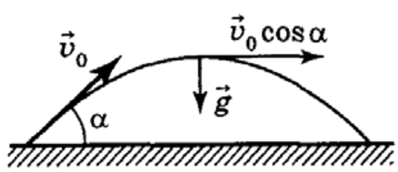

Рис. 11

Ускорение птицы в верхней точке равно
$$a=\frac{v_o^2}{R}=\frac{g}{\cos^2\alpha}.$$

Решение 14. Пусть L – расстояние между AB и CC_1 в момент удара второй шайбы о доску, а t_1 – время движения второй шайбы до удара о доску (рис. 12).

$$L = (v_2 \sin\alpha)t_1. \quad (1)$$

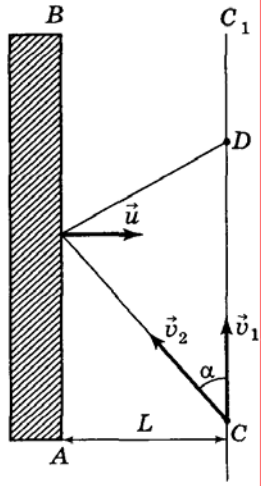

Рис. 12

При упругом ударе о неподвижную массивную стенку скорость шайбы $v_\perp$ меняет направление на противоположное, оставаясь неизменной по модулю. Перейдем в систему координат, связанную с движущейся доской. При этом

$$v_\perp^/ = v_2 \sin\alpha + u.$$

После удара скорость шайбы направлена от стенки и в неподвижной системе координат равна $v_2 \sin\alpha + 2u$. Таким образом,

$L = (v_2 \sin\alpha + 2u)t_2$, (2) где t_2 – время движения второй шайбы после отскока от доски до соударения с первой шайбой, причем

$$\frac{t_1 + t_2}{t_1} = n.$$

Из (1) и (2) находим

$$v_2 = 2u\frac{n-1}{(2-n)\sin\alpha}.$$

Проекции скоростей шайб на направление CC_1 одинаковы, поэтому

$$v_1 = v_2 \cos\alpha,\ v_1 = 2u\frac{(n-1)\cos\alpha}{(2-n)\sin\alpha}.$$

Решение 15. Пусть теплоемкость воды в термосе равна C_T, а теплоемкость бутылочки равна $C_б$. Запишем уравнение теплового баланса для обоих случаев:

$$\begin{cases} C_T(t - t_1) = C_б(t_1 - t_o), \\ C_T(t_1 - t_2) = C_б(t_2 - t_o), \end{cases}$$

откуда

$$\frac{t - t_1}{t_1 - t_2} = \frac{t_1 - t_o}{t_2 - t_o},\ t_2 = \frac{t_1(t_1 - t_o) + t_o(t - t_1)}{t - t_o} \approx 32{,}7\ ^{o}\mathrm{C}.$$

Решение 16. Пусть I – сила тока в цепи, U – напряжение на лампе. Согласно определению КПД (см. условие)

$$\eta = \frac{IU}{IU + RI^2} = 0{,}25.$$

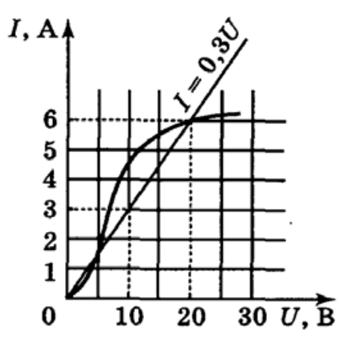

Рис. 13

Отсюда $I = 0{,}3U$. Это уравнение прямой в координатах I – U, проходящей через начало координат. Построив ее на графике (рис. 13), находим две точки пересечения. Таким образом, возможны два решения:

1) $I_1 = 1{,}5$ А, $U_1 = 5$ В, $E_1 = U_1 + I_1R = 20$ В;

2) $I_2 = 6$ А, $U_2 = 20$ В, $E_2 = U_2 + I_2R = 80$ В.

Здесь E_1 и E_2 – напряжение сети в этих двух случаях.