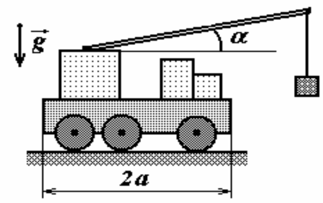
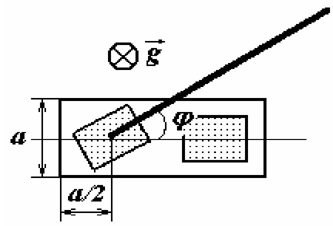
Условия задач. Теоретический тур.

Задание 1. «Автокран»

Автокран массы M = 15 т с габаритами кузова $a \times 2a$ = 3,0 м × 6,0 м имеет легкую выдвижную телескопическую стрелу максимальной длиной l = 30 м, которая крепится в центре задней половины крана. В походном положении стрела крана уложена горизонтально вдоль его оси симметрии. Поворот башни крана от оси симметрии будем характеризовать углом φ, который измеряется в горизонтальной плоскости. Угловую высоту стрелы крана будем характеризовать углом α, образуемым стрелой с плоскостью горизонта.



а) Кран работает при φ = 30° и α = 45°, причем его стрела выдвинута на $l_1 = l/2$. Какой максимальный груз m_{max} может при этом поднять кран?



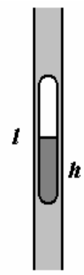
б) Наиболее опасное положение крана соответствует параметрам φ = 90° и максимально выдвинутой стреле. С каким максимальным ускорением a_{max} кран может поднимать груз массой m = 1,0 т таком положении, если α = 45°? Одинаковы ли будут силы давления правых и левых колес крана на грунт в этом случае?

в) Для увеличения грузоподъемности и безопасности автокрана применяются боковые упоры «на грунт», выдвигаемые на расстояние Δa с боковых сторон крана. При какой длине упора кран сможет поднять груз равный собственной массе, если α = 45°?

При решении считайте, что массой выдвижной телескопической стрелы и упоров крана можно пренебречь. Центр масс крана находится на оси его симметрии. Ускорение свободно падения считайте равным g = 9,8 м/с^2.

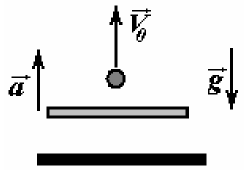
Задание 2. «Пробирка»

В длинной вертикальной цилиндрической трубе, заполненной водой, находится цилиндрическая пробирка, диаметр которой немного меньше внутреннего диаметра трубки. Толщина стенок пробирки пренебрежимо мала. Если пробирка пуста, то она равномерно поднимается со скоростью v_0, если пробирку полностью заполнить водой, то она будет равномерно опускаться со скоростью v_1.



1. Качественно объясните характер движения пробирки. Как изменятся указанные скорости движения, если взять пробирку такой же массы и такого же внешнего радиуса, но в два раза длиннее?
2. Найдите зависимость скорости пробирки от степени ее наполнения η водой (под степенью наполнения следует понимать отношение высоты заполненной части пробирки h к ее длине l: $\eta = h/l$). Постройте график этой зависимости.
3. Пробирку заполняют жидкостью, плотность которой в n раз больше плотности воды. Найдите зависимость скорости пробирки от степени ее наполнения этой жидкостью. Постройте график этой зависимости.

Задание 3. «Платформа»



Горизонтальная платформа начинает подниматься с поверхности земли с постоянным ускорением a. Через время τ после начала движения с платформы вертикально вверх с начальной скоростью v_0 относительно платформы подбрасывают небольшой шарик.

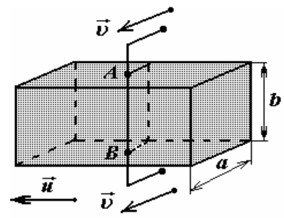
1. Запишите законы движения платформы и шарика в системе отсчета, связанной с землей. Постройте примерные графики этих зависимостей.

Начало отсчета вертикальной оси и начало отсчета времени можете выбрать самостоятельно. Законом движения называется зависимость координат тела от времени.

2. Найдите путь и перемещение шарика за время свободного полета в системе отсчета, связанной с землей.

Рассмотрите возможные варианты движения шарика при различных значениях параметров задачи. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задание 4. «Тепловой нож»



Для промышленной «распилки» ледяного бруса используется тепловой нож, представляющий собой подвижный стальной вертикальный стержень AB радиуса r = 1,0 мм, подключенный к источнику постоянного напряжения U = 5 В. Стержень в процессе работы достаточно медленно перемещают перпендикулярно длинной стороне бруса.

1) за какое время t_1 нож «перепилит» неподвижный ледяной брус прямоугольного сечения $a \times b$ = 1,0 м × 0,5 м. С какой скоростью v при этом необходимо двигать нож?

2) для разрезания бруса «под углом» одновременно с движением ножа брус продвигают в перпендикулярном направлении со скоростью u = 3,0 мм/с. Найдите время t_2 разреза в этом случае и угол α при вершине бруса выходе с конвейера.

Считайте, что длина стержня равна высоте бруса, и все количество теплоты, выделяемое в системе, идет только на плавление льда. Лед находится при температуре плавления. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3\cdot10^5$ Дж/кг, *плотность льда* $\rho = 9{,}2\cdot10^2$ кг/м^3, *удельное сопротивление стали* $\rho^* = 9{,}8\cdot10^{-8}$ Ом·м.

Решение задач.

Решение 1. а) Пусть кран равномерно поднимает груз m при угле поворота башни крана φ и подъеме стрелы на угол α над горизонтом. Основная нагрузка в этом случае будет приходиться на колесный ряд, расположенный со стороны груза. Соответственно здесь (вдоль длинной стороны крана) будет проходить ось возможного опрокидывания машины. Опрокидывающий момент силы тяжести груза относительно этой оси, параллельной длинной стороне крана, равен

$$M_1 = mg(l_1 \cos\alpha \sin\varphi - \frac{a}{2}).\ (1)$$

Соответственно стабилизирующий момент силы тяжести самого крана относительно той же оси

$$M_2 = Mg\frac{a}{2}\ (2)$$

При равновесии крана

$$M_1 = M_2 \Rightarrow m = \frac{a}{2l_1\cos\alpha\sin\varphi - a}M = 2{,}5\ \text{т. (3)}$$

Подчеркнем, что необходимо также проверить условие отсутствия опрокидывания крана относительно второй (малой) стороны при равномерном подъеме груза. В этом случае (будем считать, что передние колеса удалены от начала машины незначительно)

$$M_1 = mg(l_1\cos\alpha\cos\varphi - \frac{3a}{4})\ \ (4)$$

$$M_2 = Mga\ \ (5)$$

Из условий (4) – (5) находим максимально возможный груз для «короткой» оси крана

$$m = \frac{4a}{4l_1\cos\alpha\cos\varphi - 3a} = 7{,}3\ \text{т. (6)}$$

Как видим, в этом случае максимальное значение груза ограничивается наименьшим из значений (3) или (6)

$$m = 2{,}5\ \text{т. (7)}$$

Как и следовало ожидать, наиболее вероятное опрокидывание машины в этом случае – «набок».

б) При вычислении максимальной грузоподъемности в наиболее опасном положении следует в (3) положить $\varphi = 90^\circ$, $l_1 = l$. Соответствующий расчет дает

$$m_3 = \frac{a}{2l\cos\alpha - a}M = 1{,}1\ \text{т. (8)}$$

При ускоренном движении груза вверх его вес (соответственно и опрокидывающий момент) увеличиваются по закону

$$T = m_4(a + g)\ \ (9)$$

Следовательно, при максимальном ускорении груза $a_{\max}$ должно выполняться равенство

$$m_4(a_{\max} + g) = m_3 g \Rightarrow a_{\max} = \frac{m_3 - m_4}{m_4}g = \frac{g}{10} = 0{,}98\ \text{м/с}^2.\ (10)$$

Конечно же силы давлений правого и левого колесных рядов крана на грунт будут различны, поскольку в противном случае они не смогут удержать машину в равновесии. Более того, можно заметить, что при критических параметрах внешний (по отношению к нагрузке) колесный ряд уже оторвется от земли и не будет оказывать на нее давления. Незначительное увеличение нагрузки в этом случае может привести к опрокидыванию машины.

в) При выдвижении боковых упоров увеличивается площадь опоры автокрана, что, в соответствии с правилами статики, увеличивает его устойчивость. Формально это можно описать заменой a в выражении (8) на $a + 2\Delta a$. Соответствующий расчет дает

$$M = \frac{a + \Delta a}{2l\cos\alpha - (a + \Delta a)}M \Rightarrow \Delta a = \frac{l\cos\alpha - a}{2} = 9\ \text{м. (11)}$$

Конечно же, упоры получились «гигантских» размеров, поскольку мы потребовали от обычного автокрана «муравьиной супермощности». В реальности автокраны работают с грузами, не превосходящими их по массе, что требует упоров значительно меньших размеров.

Решение 2. 1. Во время движения на пробирку действуют сила тяжести, выталкивающая сила Архимеда и сила вязкого трения, пропорциональная скорости движения пробирки. Так как сила сопротивления пропорциональна скорости, то по прошествии малого промежутка времени пробирка будет двигаться с постоянной скоростью, которую можно найти из условия равновесия сил (положительное направление – вверх):

$$\rho Vg - m_o g - \rho_1 \eta V g = \beta v\,, (1)$$

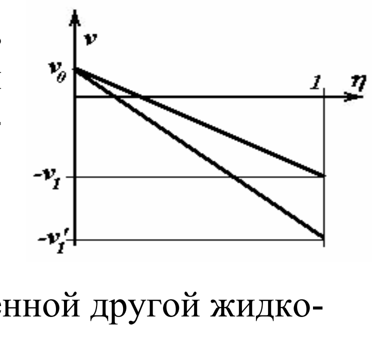
где ρ, ρ_1 – плотности воды и жидкости внутри пробирки, V – объем пробирки, m_o – масса пустой пробирки, β – коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и скоростью пробирки. Основная причина, приводящая к возникновению силы сопротивления – перетекание воды в узком слое между стенками трубки и пробирки, поэтому коэффициент β приблизительно пропорционален длине пробирки. Следовательно, если взять пробирку вдвое большей длины (при прочих равных условиях), то указанные скорости приблизительно уменьшатся в два раза.

2. Из уравнения (1) следует, что скорость установившегося движения пробирки линейно зависит от степени ее наполнения

$$v = A\eta + B\,, (2)$$

где A, B – постоянные коэффициенты, которые можно определить из двух известных скоростей. Окончательный вид зависимости скорости от степени наполнения имеет вид

$$v = -\left(v_o + v_1\right)\eta + v_o\,. (3)$$



3. Из уравнения (1) следует, что коэффициент при η, в линейной зависимости вида (2), пропорционален плотности налитой жидкости. Поэтому для другой жидкости зависимость скорости от степени наполнения будет иметь вид

$$v = -n\left(v_o + v_1\right)\eta + v_o\,. (4)$$

Графики этих зависимостей показаны на рисунке, где обозначена скорость движения пробирки, полностью заполненной другой жидкостью,

$$v_1' = nv_1 + (n-1)v_o\,.$$

Решение 3. 1. Законы движения платформы $x_1(t)$ и шарика $x_2(t)$ имеют вид

$$x_1 = \frac{at^2}{2};\; x_2 = \frac{a\tau^2}{2} + \left(a\tau + v_o\right)\cdot\left(t - \tau\right) - \frac{g\left(t-\tau\right)^2}{2}\,. (1)$$

Здесь начало отсчета времени совмещено со стартом платформы, а начало отсчета вертикальной оси X находится на поверхности земли.

Схематические графики законов движения показаны ниже на рисунке.

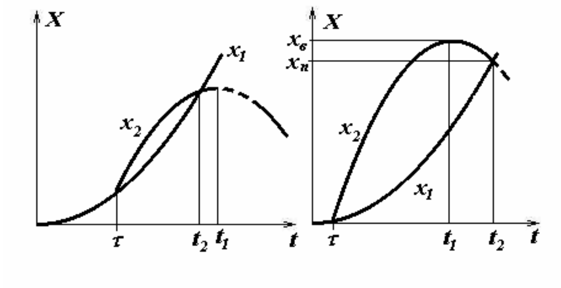
Следует отметить, что в данной задаче следует рассмотреть два варианта:

– до падения на платформу шарик успевает достичь верхней точки траектории свободного движения;

– платформа догоняет шарик, который продолжает двигаться вверх.

Для упрощения дальнейших расчетов совместим начало отсчета координат с точкой, в которой был брошен шарик, с этим же моментом свяжем начало отсчета времени. В такой системе отсчета законы движения имеют вид

$$\begin{aligned} x_1 &= a\tau \cdot t + \frac{at^2}{2} \\ x_2 &= \left(a\tau + v_o\right)\cdot t - \frac{gt^2}{2} \end{aligned}. \ (2)$$



Определим момент времени падения шарика на платформу t_2, для чего следует решить уравнение $x_1(t_2) = x_2(t_2)$. Решение этого уравнения выражается формулой

$$t_2 = \frac{2v_o}{a+g}. \ (3)$$

При свободном движении шарика в верхней точке его скорость обращается в нуль, что позволяет найти этот момент времени. Так как скорость шарика изменяется по закону $v_2 = \left(a\tau + v_o\right) - gt$, то скорость шарика может обратиться в нуль при

$$t_1 = \frac{a\tau + v_o}{g}. \ (4)$$

Итак, шарик не успеет достичь верхней точки своей траектории свободного движения при выполнении условии $t_1 > t_2$, или при следующем соотношении между исходными параметрами

$$v_o < a\tau\frac{g+a}{g-a}. \ (5)$$

В этом случае модуль перемещения и пройденный путь равны и могут быть найдены как координата точки падения шарика на платформу

$$x_n = x_1\left(t_2\right) = x_2\left(t_2\right) = \frac{2v_o a}{a+g}\cdot\left(\tau + \frac{v_0}{a+g}\right). \ (6)$$

Если же неравенство (5) не выполняется, то пройденный путь будет превышать модуль перемещения (который, по-прежнему, определяется формулой (6)). Как легко увидеть из графиков законов движения, в этом случае пройденный путь равен

$$S = x_n + 2\left(x_в - x_n\right), \ (7)$$

где $x_в$ – координата верхней точки траектории, которая в свою очередь легко определима

$$x_в = \frac{\left(a\tau + v_o\right)^2}{2g}. \ (8)$$

Итак, окончательно получим выражения для пройденного пути

$$S = \frac{\left(a\tau + v_o\right)^2}{g} - \frac{2v_o a}{a+g}\cdot\left(\tau + \frac{v_o}{a+g}\right). \ (9)$$

Решение 4. а) процесс разрезания бруса представляет собой процесс плавления той области образца, где проходит нож. Следовательно, необходимо расплавить слой льда массой

$$m = \rho \cdot V = \rho ab2r\,,\ (1)$$

где ρ^* – плотность льда. Для этого потребуется количество теплоты

$$Q = \lambda \cdot m = 2\lambda \rho abr\,,\ (2)$$

которое должно выделится на резисторе сопротивлением

$$R = \rho^* \frac{l}{S} = \rho^* \frac{b}{\pi r^2}\,,\ (3)$$

Где ρ^* – удельное сопротивление стали. С учетом закона Джоуля – Ленца можем записать

$$\frac{U^2}{R} t_1 = \lambda m \Rightarrow \{(1)-(3)\} \Rightarrow \frac{U^2 \pi r^2}{\rho^* b} t_1 = 2\lambda \rho abr\,.\ (4)$$

Из (4) находим искомое время

$$t_1 = \frac{2\lambda \rho \rho^* ab^2}{U^2 \pi r} = 1{,}9 \cdot 10^2\,.\ (5)$$

Соответственно, для скорости движения ножа получаем

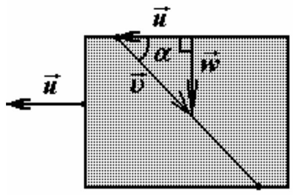
$$\upsilon = \frac{a}{t_1} = \frac{U^2 \pi r}{2\lambda \rho \rho^* b^2} = 5{,}3 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 5{,}3\ \frac{\text{мм}}{\text{с}}\,.\ (6)$$

Из анализа (6) видно, что при заданных параметрах системы скорость движения ножа относительно бруса является постоянной величиной и не зависит от толщины a бруса.

б) Для решения задачи в этом случае перейдем в подвижную систему отсчета, связанную с брусом, т.е. движущуюся влево со скоростью $\vec{u}$. Согласно преобразованиям Галилея при таком переходе (прямом) скорость ножа относительно земли $\vec{w}$ связана с относительной скоростью $\vec{\upsilon}$ следующим образом

$$\vec{v} = \vec{w} - \vec{u}\,.\ (7)$$

Поскольку скорость движения ножа относительно бруса (6) не может измениться по модулю (см. пункт а)), то из прямоугольного треугольника скоростей, соответствующего преобразованиям Галилея, найдем скорость w нормального движения ножа



$$w = \sqrt{\upsilon^2 - u^2} = 4{,}4\ \frac{\text{мм}}{\text{с}}\,.\ (8)$$

При таком способе «распилки» потребуется время

$$t_2 = \frac{a}{w} = 2{,}3 \cdot 10^2\ \text{с}.\ (9)$$

Угол α при вершине бруса в этом случае определяется опять же из векторного треугольника скоростей

$$\cos\alpha = \frac{u}{v} = 0{,}57 \Rightarrow \alpha = 56^\circ = 0{,}97\ \text{рад}\,.\ (10)$$