Областная олимпиада. 9 класс. Могилев. 1999 г.

Условия задач. Теоретический тур.

1. Орудие установленное на горе высотой h = 2000 м, посылает горизонтально снаряд со скоростью v_1 = 800 м/с. Через промежуток времени τ = 5 с. Из этой же точки выпускается другой снаряд. Какой скоростью v_2 он должен обладать и как его надо выпустить, чтобы оба снаряда одновременно упали в одну точку поверхности Земли.

2. Два тела, находящихся на горизонтальной плоскости, движутся по одной прямой навстречу друг другу с начальными скоростями v_{o1} = 0,4 м/с и v_{o2} = 0,6 м/с и постоянными ускорениями a_1 = 0,02 м/с^2 и a_2 = 0,04 м/с^2, направленным противоположно своим скоростям. При каком максимальном расстоянии между телами в начальный момент времени они могут поравняться друг с другом?

3. Потери мощности в линии электропередач составляют k_1 = 5 % от мощности, получаемой потребителем. Во сколько раз нужно изменить напряжение на входе линии и сопротивление потребителя для того, чтобы при той же мощности, получаемой потребителем, потери в линии снизить до k_2 = 1 %.

4. На конце доски длиной L и массой M находится брусок массой m и длиной l. Доска может скользить без трения по горизонтальной плоскости. Коэффициент трения скольжения бруска по поверхности доски μ. Какую скорость v надо толчком сообщить доске, чтобы она выскользнула из-под бруска?

5. В U-образной трубке находится вода и масло. Разность уровней воды в левом и правом колене равна h. В некоторый момент времени открывают кран K в тонкой горизонтальной трубке, соединяющей колена так, как показано на рисунке. Как изменится уровень масла в правом колене, если плотность масла равна 2/3 плотности воды?

Экспериментальный тур.

1. Действующая модель подъемного крана способна поднять 10 бетонных плит без обрыва троса. Сколько плит поднимет реальный кран, изготовленный из тех же материалов, если линейные размеры крана, троса и плит в 12 раз больше, чем в модели?

Примечание: Напряжение, возникающее в тросе сечением S при нагрузке весом P, равно $\sigma = F/S$.

2. 1 кг льда и 1 кг легкоплавкого вещества, не смешивающего с водой при t = –40 ^{o}С помещены в теплоизолированный сосуд с нагревателем внутри. На нагреватель подали постоянную мощность. Зависимость температуры в сосуде от времени показана на рисунке. Удельная теплоемкость льда равна $c_л = 2000$ Дж/(кг·К), твердого вещества $c_T = 1000$ Дж/(кг·К). Определить удельную теплоту плавления вещества λ и его удельную теплоемкость c в расплавленном состоянии.

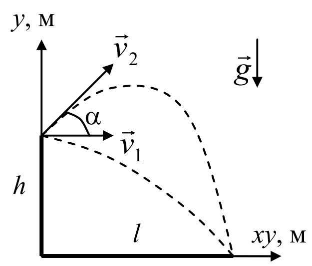
3. На крышку черного ящика, содержащего радиотехнические элементы выведено 4 клеммы с номерами 1,2, 3, 4. Используя универсальный источник постоянного и переменного (на частоте ω_o) тока, автоматически поддерживается некоторое определенное напряжение на выходе в обоих режимах и имеющий внутреннее сопротивление $z_o = 0$, а так же встроенный амперметр, экспериментатор получил следующие данные:

Номера пар клемм		1,2	2,3	3,4	1,3	2,4	1,4
Сила тока (А)	Постоянный ток в обоих направлениях	0	0	2	4	0	4
	Переменный ток	4	2,2	0,85	4	4	2,2

Используя данные изобразить графически (схематично) вид семейств вольтамперных характеристик для пар клемм (3, 4), (2, 3), (2, 4). Каждое семейство должно содержать характеристику по постоянному току ($\omega = 0$) и по переменному току на частотах $\omega < \omega_o$; ω_o; $\omega_o < \omega$. Все графики исполнить в одинаковом масштабе.

Решение задач.

Решение 1. Запишем уравнение движения первого снаряда



$$x_1 = v_1 t \text{ и } y_1 = h - \frac{gt^2}{2}.$$

Если $y_1 = 0$, то $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 20$ с.

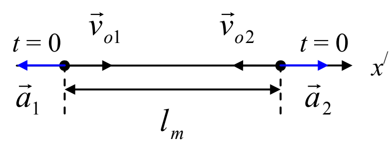
Дальность снаряда, при этом, равна $l = v_1 t_1 = 16000$ м.

Для второго снаряда

$$x_2 = v_2 \cos\alpha (t-\tau) \text{ и } y_2 = h + v_2 \sin\alpha (t-\tau) - \frac{g(t-\tau)^2}{2}.$$

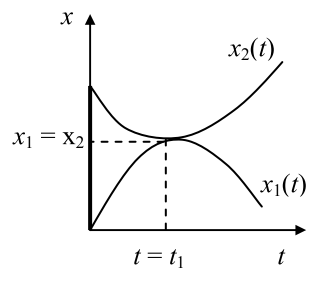
Если $y_2 = 0$, то $x_2 = l = v_2 \cos\alpha (t-\tau)$ и $v_2 \sin\alpha (t-\tau) = \frac{g(t-\tau)^2}{2} - h$.

Следовательно, $tg\alpha = \frac{g(t-\tau)^2 - 2h}{2l} = 0{,}055$. Снаряд надо выпустить под углом $\alpha = arctg 0{,}055 = -3^o 12^/$. Минус указывает на то, что снаряд выпущен под углом к горизонту вниз. Его скорость равна $v_2 = \frac{l}{\cos\alpha \cdot (t-\tau)} = 1{,}07$ км/с



Решение 2. Запишем уравнения движения тел и построим графики их движения.

$$x_1 = v_{o1} t - \frac{a_1 t^2}{2}; \; x_2 = l_m - v_{o2} t + \frac{a_2 t^2}{2}$$



и уравнения скорости

$$v_{1x} = v_{o1} - a_1 t; \; v_{2x} = -v_{o2} + a_2 t.$$

В момент времени, когда тела поравняются, графики координат при начальном максимальном расстоянии между телами будут касаться, т. е. иметь общую касательную. В этот момент их скорости будут равны. При $t = t_1$, $v_{1x} = v_{2x}$;

$$v_{o1} - a_1 t = -v_{o2} + a_2 t \Rightarrow t = \frac{v_{o1} + v_{o2}}{a_1 + a_2}.$$

Кроме того, при $t = t_1$, $x_1 = x_2$;

$$v_{o1}t - \frac{a_1 t^2}{2} = l_m - v_{o2}t + \frac{a_2 t^2}{2} \Rightarrow l_m = \frac{(v_{o1} + v_{o2})^2}{2(a_1 + a_2)} = 9 \text{ м}.$$

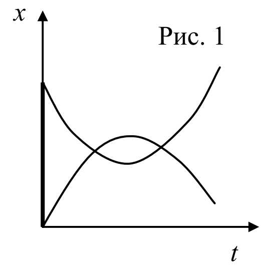


Рис. 1

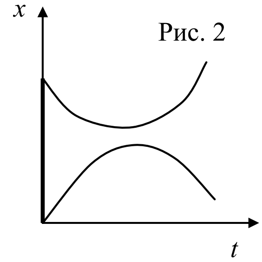


Рис. 2

Если начальное расстояние l будет больше $l > l_m$, то тела не встретятся (рис. 2). Если $l < l_m$, то тела встретятся дважды (рис. 1).

Решение 3. Мощность, полученная потребителем

$$P_1 = I_1^2 R_1 = \frac{U_1^2}{(R_1 + r)} R_1,$$

где I_1 – ток в линии электропередач, r – сопротивление линии, R_1 – сопротивление потребителя, U_1 – напряжение на входе линии. Эта мощность должна остаться неизменной $\frac{U_1^2}{(R_1 + r)^2} R_1 = \frac{U_2^2}{(R_2 + r)^2} R_2$, где U_2 – новое напряжение, R_2 – новое сопротивление.

По условию задачи

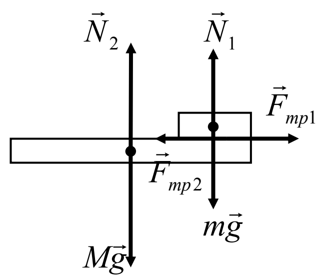
$$k_1 = \frac{I_1^2 r}{I_1^2 R_1} = \frac{r}{R_1}, \text{ а } k_2 = \frac{r}{R_2}.$$

Следовательно, $\frac{R_2}{R_1} = \frac{k_1}{k_2}$. Итак: $\frac{U_2^2}{U_1^2} = \left(\frac{R_2 + r}{R_1 + r}\right)^2 \cdot \frac{R_1}{R_2}$. Преобразуем последнее выражение

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2 + r}{R_1 + r} \cdot \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = \frac{r(1 + \frac{R_2}{r})}{r(1 + \frac{R_1}{r})} \cdot \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = \frac{1 + \frac{1}{R_2}}{1 + \frac{1}{R_1}} \cdot \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = \frac{1 + R_2}{1 + R_1} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \approx \sqrt{5}$$

Решение 4. Второй закон Ньютона для бруска и доски в проекции на ось OX имеет вид:

$$ma_1 = \mu mg \Rightarrow a_1 = \mu g \text{ и } Ma_2 = -\mu \frac{m}{M} g.$$



Рассмотрим движение бруска относительно доски

$$a_{12} = \mu g + \mu \frac{m}{M} g = \mu g (1 + \frac{m}{M}).$$

$$v_o^2 = 2a_{12}(L - \frac{l}{2}) = 2(L - \frac{l}{2})\mu g (1 + \frac{m}{M}) \Rightarrow v_o = \sqrt{2\mu g (L - \frac{l}{2})(1 + \frac{m}{M})}.$$

$$v > v_o > \sqrt{2\mu g (L - \frac{l}{2})(1 + \frac{m}{M})}.$$

Решение 5. В трубке ABC – находится вода, в CD – масло. До открытия крана давление на уровне BC одинаково: $\rho_в gh = \rho_м gh_1$, $\rho gh = \frac{2}{3}\rho gh_1 \Rightarrow h_1 = \frac{3}{2}h$.

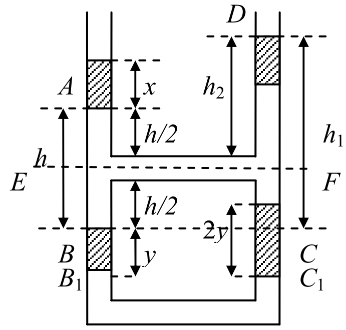
До открытия крана давление на уровне переходной трубки в левом и в правом коленах разные. В левом колене $p_1 = \rho g\frac{h}{2} = \rho_м gh_2$, в правом

$$p_2 = \rho_м gh_2 = \frac{2}{3}\rho g(h_1 - \frac{h}{2}) = \frac{2}{3}\rho gh;\ p_2 > p_1$$

и, следовательно, масло по переходной трубке будет переходить вверх. Пусть справа уровень масла понизился на x, а слева на столько же поднялся вверх. Теперь нарушилось равенство давлений на уровне BC:

$$p_B = \rho_м gx + \rho_в gh = \frac{2}{3}\rho gx + \rho gh,\ p_C = \rho_м g(h_1 - x) = \frac{2}{3}\rho g(\frac{3}{2}h - x) = \rho gh - \frac{3}{2}\rho gx.$$

Теперь $p_B > p_C$, поэтому часть воды должно перетечь в правое колено. Пусть слева уровень воды понизился на y, а справа поднялся на v. Запишем теперь равенство давлений на уровнях EF и B_1C_1.



$$EF:\ \rho_м gx + \rho_в g(\frac{h}{2} - y) = \rho_м = g(h_2 - x)$$

$$B_1C_1:\ \rho_м gx + \rho_в gh = \rho_в g2y + \rho_м(h_1 - x).$$

Учитывая, что $\rho_м = \frac{2}{3}\rho_в$; $h_1 = \frac{3}{2}h$ и $h_2 = h$, получим $x = \frac{1}{4}h$ и $y = \frac{1}{6}h$. Следовательно, общее понижение уровня равно

$$d = x - y = \frac{1}{12}h.$$

Экспериментальный тур.

Решение 1. Предел прочности материала троса определяется условием

$$10\frac{P}{S} < \sigma_o < 11\frac{P}{S}\ (1),$$

где P – вес одной модельной плиты.

При переходе к реальному крану все линейные размеры увеличиваются в n = 12 раз, тогда

$P' = n^3P$; $S' = n^2S$ (2). Максимальное число плит N, которое может поднять реальный кран, определяется условием:

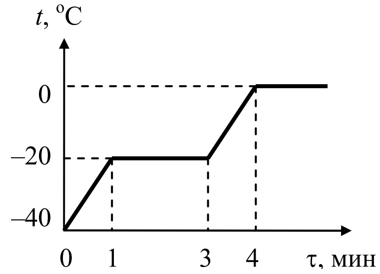
$$(N+1)\frac{P'}{S'} > \sigma_o \geq N\frac{P'}{S'} = N\frac{n^3P}{n^2S} = Nn\frac{P}{S} = 12N\frac{P}{S}\ (3).$$

Откуда

$$N \leq \frac{\sigma_o}{12^{P/S}}.$$

Учитывая условие (1), т. е. $\frac{\sigma_o}{11^{P/S}} < 1$, получаем $N \le \frac{\sigma_o}{12^{P/S}} < \frac{\sigma_o}{11^{P/S}} < 1$.

Таким образом, реальный кран не сможет поднять ни одной плиты.



Решение 2. Плато при t = –20 °C соответствует процессу плавления вещества при t = 0 °C – таянию льда.

Нагрев смеси от –40 °C до –20 °C потребовал времени τ_1 = 60 с и количества тепла $P\tau_1$, где P – мощность нагревателя.

Уравнение теплового баланса для этого процесса:

$$(c_л + c_T)m \cdot 20 = P\tau_1 \quad (1).$$

Для полного плавления вещества потребовалось времени τ_2 = 120 с: $m\lambda = P\tau_2$ (2).

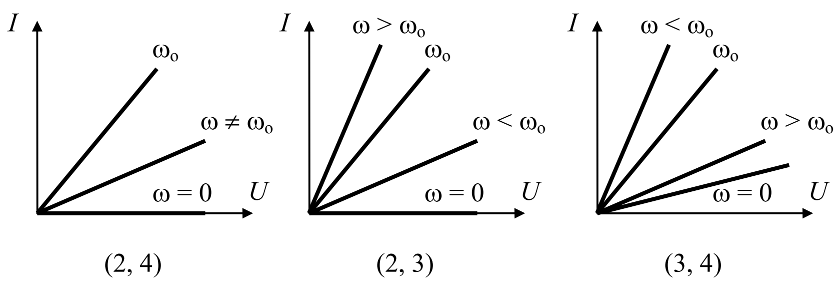
Разделив уравнение (1) на (2) найдем λ: $\lambda = (c_л + c_T)\frac{\tau_2}{\tau_1} \cdot 20 = 1,2 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Нагрев льда и вещества от –20 °C до 0 °C потребовал τ_3 = 60 с, и уравнение теплового баланса примет вид: $(c_л + c)m \cdot 20 = P\tau_3$ (3). Разделив уравнение (3) на (1), находим c:

$$c = (c_л + c_T)\frac{\tau_3}{\tau_1} - c_л = 1000\ \text{Дж/(кг·К)}.$$

Решение 3. Используя данные таблицы, можно определить содержимое черного ящика и установить, что

$$\omega_o L = \frac{1}{\omega_o L} = R.$$



Таким образом, цепь (2, 4) настроена в резонанс. Тогда опорной является характеристика на частоте ω_o, снятой для цепи (2, 4). Все остальные будут иметь меньшие углы наклона к оси напряжений, в том числе и равные нулю.