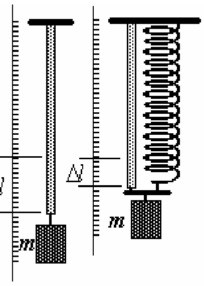
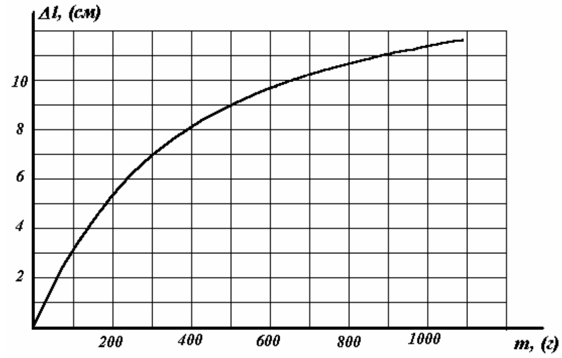
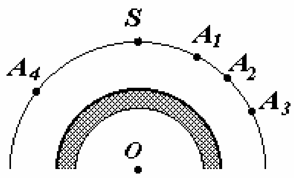
Условия задач. Теоретический тур.

1. Для исследования упругих свойств резины резиновая ленточка была подвешена вертикально, и к ее нижнему краю прикреплялись различные грузы. При этом была получена следующая зависимость удлинения полоски Δl от массы m подвешенного груза (см. график на отдельном бланке). После этого рядом параллельно с резинкой прикрепили упругую пружинку жесткости k = 50 Н/м, длина которой в недеформированном состоянии равна длине нерастянутой резинки. Постройте график зависимости удлинения системы «резинка-пружина» от массы подвешенного груза.

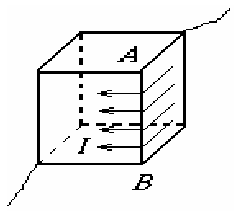




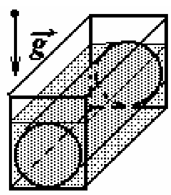
2 Точечный источник света S расположен недалеко от поверхности зеркальной сферы. Постройте ход лучей, идущих от источника S и отражающихся в точки A_1, A_2, A_3, A_4. Убедитесь, что продолжения этих лучей не пересекаются в одной точке. Значит ли это, что в зеркальном шаре нельзя увидеть изображения точки S? Ответ обоснуйте.



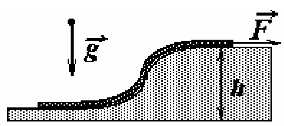
3. Из тонкой однородной жести изготовили куб, к диагонально противоположным вершинам которого припаяли электрические контакты. Сопротивление куба в этом случае оказалось равным R = 10 Ом. Какой электрический ток I будет пересекать ребро куба AB, если куб подключить к источнику постоянного напряжения U = 60 В?



4. Сплошной однородный цилиндр радиуса R и длины L лежит на дне сосуда в форме параллелепипеда длины чуть большей L, ширины чуть большей $2R$. Сосуд заполнен жидкостью, так что она полностью покрывает цилиндр. Плотность материала цилиндра ρ, плотность жидкости ρ_0. Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы вынуть цилиндр из жидкости?



5. Однородную гибкую нерастяжимую веревку массы m и длины L втаскивают на гладкую горку высоты h, профиль которой показан на рисунке, под действием постоянной горизонтально направленной силы F. Определите ускорение веревки.



Решения задач.

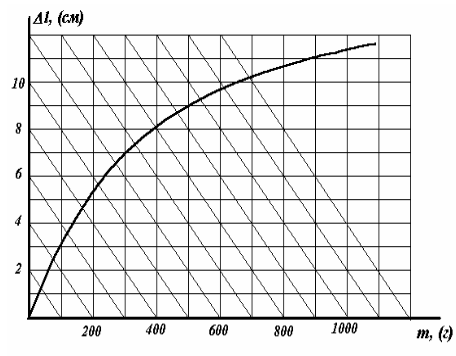
Решений 1. При параллельном соединении резинки и пружины их удлинения Δl одинаковы, а сумма сил упругости резинки F_1 и пружины F_2 равна весу подвешенного груза:

$$F_1 + F_2 = mg. \quad (1)$$

Учитывая, что деформация пружины подчиняется закону Гука $F_2 = k\Delta l$, запишем выражение для деформации пружины в виде

$$\Delta l = \frac{mg - F_1}{k}. \quad (2)$$

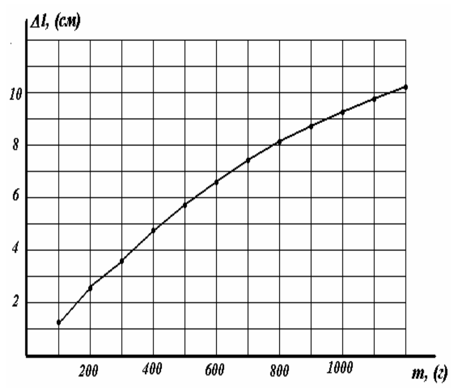
Зависимость деформации резины от приложенной силы $\Delta l(F_1)$ задана в виде графика, поэтому деформация системы может быть найдена как решение системы уравнений (2) и представленной зависимости. Однако, величина деформации резины дана в виде функции от массы подвешенного груза, иными словами $F_1 = m_1 g$, где m_1 - масса, которую «удерживает» резина. Поэтому запишем уравнение (2) в виде зависимости от m_1:



$$\Delta l = \frac{g}{k}(m - m_1). \quad (3)$$

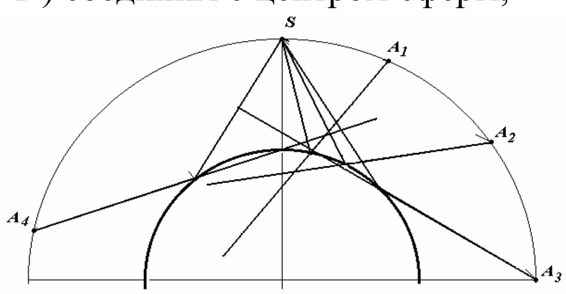
График зависимости Δl от m_1 представляет прямую линию пересекающую ось абсцисс в точке $m_1 = m$ с коэффициентом наклона g/k, а решение системы есть точка пересечения данной прямой с графиком зависимости деформации резины от массы прикрепленного груза.

Проведя семейство прямых, подчиняющихся уравнению (3), для различных значений m, получим искомый набор значений деформаций системы «резинка-пружина». График такой зависимости представлен на рисунке.

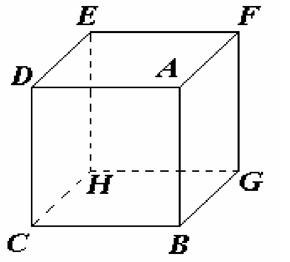


Решение 2. Для построения хода лучей необходимо воспользоваться законом отражения света: угол падения равен углу отражения.

Рассмотрим, например построение искомого луча для точки A_2. Для этого необходимо найти на сфере такую точку C, чтобы угол SCB был равен углу BCA_2, где BC – продолжение радиуса, проведенного в точку C. Такое построение очевидно - соединим точки A_2 и S, середину отрезка SA_2 (точку B) соединим с центром сферы, точка пересечения этого отрезка со сферой и будет искомая точка C. Аналогично можно построить и остальные требуемые лучи.



Как видно, действительно, продолжения этих лучей не пересекаются в одной точке. Следовательно, сфера не формирует точечного изображения точечного источника. Тем не менее, это не означает, что в сфере нельзя увидеть четкого изображения источника. Но изображение, видимое глазом, формируется очень узким пучком лучей, которые пересекаются в очень узкой области, которая и является практически точечным изображением источника.



Решение 3. По закону Ома сила полного тока, протекающего через куб равна

$$I = \frac{U}{R} = \frac{60B}{10Ом} = 6{,}0\,A.$$

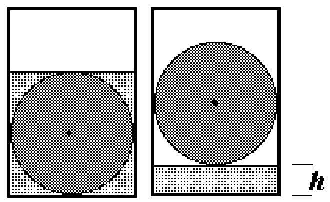
Рассмотрим теперь замкнутый контур $ABGHEDA$, состоящий из шести равноправных ребер (каждое отстоит от точки C на расстоянии одной грани). Силы токов, пересекающих каждое из этих ребер равны, следовательно, сила тока, пересекающего ребро AB, равна $I/6 = 1{,}0\,A$.

Решение 4. Минимальную работу в данном случае легко подсчитать как изменение потенциальной энергии системы. Объем воды в сосуде

$$V = 4R^2L - \pi R^2 L;$$

после того как цилиндр достанут из воды вода заполнит дно сосуда слоем толщиной

$$h = \frac{V}{2RL} = (2 - \frac{\pi}{2})R.$$



Следовательно, на такую же высоту необходимо поднять цилиндр. Изменение его потенциальной энергии при этом

$$\Delta U_1 = mgh = \pi R^3 L\rho g(2 - \frac{\pi}{2}).$$

Потенциальная энергия воды уменьшится на величину

$$\Delta U_2 = (4-\pi)R^2 L\rho_0 g(R - \frac{h}{2}) = (4-\pi)R^3 L\rho_0 g(1 + \frac{\pi}{4}),$$

при записи этого соотношения учтено, что первоначально центр тяжести воды находился на высоте R, а затем оказался на высоте $\frac{h}{2}$.

Таким образом, полное изменение энергии (следовательно, и необходимая работа) рассчитываются по формуле

$$A = \Delta U = \Delta U_1 - \Delta U_2 = \frac{4-\pi}{2}R^3 Lg(\pi\rho - (2 + \frac{\pi}{2})\rho_0).$$

Решение 5. Рассмотрим силы, действующие на небольшой участок веревки длиной Δl_i – сила тяжести $\Delta m_i \vec{g}$, и натяжения веревки с двух сторон от выделенного участка $\vec{T}_{1i}$ и $\vec{T}_{2i}$. Запишем уравнение второго закона Ньютона для выделенного кусочка в проекции на направление самого участка (на рисунке обозначена ось x):

$$\Delta m_i a = T_{2i} - T_{1i} - \Delta m_i g\cos\alpha_i,$$

Выразим массу кусочка $\Delta m_i = \frac{m}{L}\Delta l_i$ и подставим в полученное уравнение

$$\frac{m}{L}\Delta l_i a = T_{2i} - T_{1i} - \frac{mg}{L}\Delta l_i \cos\alpha_i,$$

где a – ускорение веревки.

Просуммируем уравнения, относящиеся ко всем участкам веревки. Учтем, что силы натяжения отдельных участков встречаются дважды, причем с различными знаками, поэтому их сумма для всех внутренних участков обратится в нуль, останется только сила натяжения одного из концов веревки (то есть F). Очевидно, что сумма длин Δl_i равна длине веревки L; величина $\Delta l_i \cos\alpha_i = \Delta h_i$ есть разность высот концов выделенного участка, поэтому сумма этих величин равна h. Таким образом, после суммирования получим

$$ma = F - \frac{h}{L}mg\,.$$

Откуда находим ускорение

$$a = \frac{F}{m} - \frac{h}{L}g\,.$$

Данная задача может быть также легко решена с использованием энергетического подхода. Пусть за время Δt веревка сместилась на расстояние Δx, тогда сила F совершила работу $A = F\Delta x$, которая пошла на увеличение кинетической

$$\Delta E_{кин} = \Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) = mv\Delta v$$

и потенциальной энергии веревки.

$$\Delta E_{пот} = m\frac{\Delta x}{L}gh\,.$$

Таким образом,

$$F\Delta x = mv\Delta v + m\frac{\Delta x}{L}gh.$$

Разделим это уравнение на Δt (с учетом $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v,\ \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$) и сократим на v, получим

$$F = ma + \frac{h}{L}mg,$$

откуда следует ответ задачи.