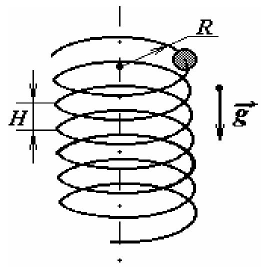
Условия задач. Теоретический тур.

1. В большой теплоизолированный сосуд, содержащий 10 г льда при температуре –10 ^{o}C, впускают 5,0 г водяного пара (температура 100 ^{o}C) при нормальном давлении. В каких состояниях и в каких количествах будет находиться вода в сосуде после установления теплового равновесия? Теплоемкостью сосуда и воздуха в нем пренебречь. Удельная теплоемкость льда 2,1 кДж/(кг·К), воды 4,2 кДж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $3{,}3\cdot 10^{5}$ Дж/кг, удельная теплота парообразования воды 2,3 МДж/кг.

2. При подключении к источнику постоянного напряжения никелевого проводника по истечение длительного времени он нагрелся на $\Delta t_1 = 100$ ^{o}C. На сколько градусов нагрелся такой же проводник при подключении к тому же источнику, если его длину уменьшить в два раза? Тепловым расширением проводника пренебречь. Удельное электрическое сопротивление никеля зависит от температуры по закону $\rho = \rho_o(1 + \alpha\Delta t)$, где $\alpha = 0{,}0050$ K^{-1}, Δt– изменение температуры, ρ_o– удельное сопротивление при начальной температуре.

3. Небольшая бусинка начинает скользить по спирали радиусом R, ось которой вертикальна. Определите величину скорости установившегося движения бусинки, если коэффициент ее трения о спираль равен μ. Шаг спирали h.



4. Два камешка брошены с высокой башни под углом $\alpha > 0$к горизонту со скоростью v_o с интервалом времени Δt один за другим. Определите наименьшее расстояние между ними в течение полета и момент времени, когда это произойдет. Сопротивлением воздуха пренебречь.

5. Параллельный пучок света падает нормально на стену темной комнаты, освещая на ней круглое пятно диаметром 2,0 см. На расстоянии 1,0 м от стены в пучок вносят зеркальный шарик, так что его центр оказывается на оси пучка. При этом большая часть стены оказывается освещенной, но в центре образуется круглая «тень» диаметром 4,0 см. Объясните явление и найдите диаметр шарика.

Решения задач.

Решение 1. Так как заранее нельзя предсказать, в каком состоянии будет находиться вода в сосуде, то при решении задачи необходимо сразу проводить вычисления количеств теплоты. При конденсации пара может выделиться

$$Q_o = rm_п = 11,5 \text{ кДж.}$$

На нагревание льда до температуры плавления требуется

$$Q_1 = c_л m_л \Delta t_л = 210 \text{ Дж } (Q_1 < Q_o);$$

для таяния льда

$$Q_2 = \lambda m_л = 3,3 \text{ кДж } (Q_1 + Q_2 < Q_o);$$

на нагревание воды до кипения

$$Q_3 = c_в m_л \Delta t_в = 4,2 \text{ кДж } (Q_1 + Q_2 + Q_3 < Q\ ).$$

Таким образом, теплоты, выделившейся при конденсации пара хватает на нагревание льда, его плавление, и нагрев образовавшейся воды до температуры кипения, следовательно, сконденсируется только часть пара массой

$$\Delta m = (Q_1 + Q_2 + Q_3)/r = 3.4 \cdot 10^{-3} \text{ кг}.$$

Таким образом, в сосуде будет находиться $m_в + \Delta m = 13,4$ г воды при 100 °С и $m_п - \Delta m = 1,6$ г пара при той же температуре.

Решение 2. Пока отдача тепла мала (мощность теплоотдачи пропорциональна разности температур и площади поверхности) проводник нагревается, его сопротивление растет, тепловая мощность $\dfrac{U^2}{R_o(1+\alpha\Delta t)}$ падает. Стационарное состояние характеризуется равенством мощностей тепловыделения и рассеяния. Поэтому запишем дважды эти равенства для первого и второго случаев

$$\frac{U^2}{R_o(1+\alpha\Delta t_1)} = k\Delta t_1 S, \quad \frac{U^2}{R_o(1+\alpha\Delta t_2)} = k\Delta t_2 \frac{S}{2},$$

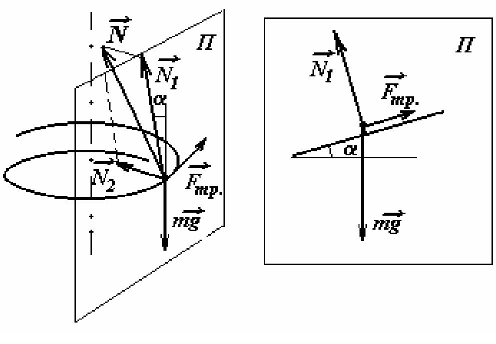
где k - некоторый коэффициент пропорциональности.

Отсюда, разделив левые части на правые, получаем квадратное уравнение

$$(\Delta t_2)^2 + \frac{1}{\alpha}\Delta t_2 - \frac{4}{\alpha}(1+\alpha\Delta t_1)\Delta t_1 = 0$$

Один из корней квадратного уравнения отрицательный и смысла не имеет, а второй дает требуемый ответ: проводник нагреется на 261 К.

Решение 3. Мы имеем типичный пример системы, самостоятельно приходящей в состояние динамического равновесия. Вначале бусинка разгоняется, растет скорость, а вместе с ней и сила реакции опоры $\vec{N}$, направленная перпендикулярно касательной к участку спирали, следовательно, возрастает и сила трения $\vec{F}$, направленная вдоль касательной к траектории в сторону противоположную скорости, причем модуль этой силы определяется известным законом $F = \mu N$. Через определенное время бусинка будет двигаться с установившейся скоростью. Опустившись на один виток, бусинка расходует запас потенциальной энергии на работу против сил трения (кине-



тическая энергия при этом больше не меняется)

$$mgH = FS = \mu N\sqrt{4\pi^2R^2 + H^2}, \ (1)$$

где $S = \sqrt{4\pi^2R^2 + H^2}$ – длина одного витка спирали.

Разложим силу реакции $\vec{N}$ на две составляющие:

$$N_1 = mg\cos\alpha$$

– в вертикальной плоскости *П*, касательной к участку спирали, и

$$N_2 = \frac{m(v\cos\alpha)^2}{R}$$

– в горизонтальной плоскости. Выражения для этих компонент получены из следующих рассуждений: в вертикальном направлении движение бусинки является равномерным со скоростью $v\sin\alpha$, следовательно в проекции на любую ось, лежащую в вертикальной плоскости, касательной к траектории сумма всех проекций сил, действующих на бусинку, равна нулю; в горизонтальной плоскости движение бусинки является равномерным движением по окружности радиуса R со скоростью $v\cos\alpha$, следовательно, бусинка движется с центростремительным ускорением, которое ей сообщает компонента силы реакции N_2. Таким образом, модуль силы реакции определяется выражением

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \sqrt{m^2g^2\cos^2\alpha + \frac{m^2v^4\cos^4\alpha}{R^2}}. \ (2)$$

В этих выражениях α – угол между касательной к траектории и спиралью. Из простых геометрических построений находим

$$tg\alpha = \frac{H}{2\pi R}, \ \cos\alpha = \frac{1}{1 + tg^2\alpha} = \frac{4\pi R^2}{4\pi^2R^2 + H^2}, \ (3)$$

Подставляя полученные выражения в (1), получаем уравнение относительно скорости v

$$\frac{g^2H^2}{\mu^2} = 4\pi^2R^2g^2 + \frac{16v^4\pi^4R^2}{4\pi^2R^2 + H^2}.$$

Разрешая уравнение, находим искомую скорость установившегося движения бусинки

$$v = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{R}}\sqrt[4]{\left(4\pi^2R^2 + H^2\right)\left(\frac{H^2}{\mu^2} - 4\pi^2R^2\right)}.$$

<u>Решение 4.</u> Выберем начало системы отсчета на башне, задачу будем решать в векторном виде. К моменту вылета второго камешка первый совершит перемещение

$$\Delta\vec{r}_o = \vec{v}_o\Delta t + \frac{\vec{g}\Delta t^2}{2}$$

и будет двигаться со скоростью

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{g}\Delta t.$$

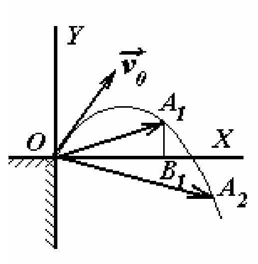
Перемещения камешков после бросания второго камешка запишутся следующим образом

$$\Delta\vec{r}_1(t) = \vec{v}_o(t + \Delta t) + \frac{\vec{g}(t + \Delta t)^2}{2},$$

$$\Delta\vec{r}_2(t) = \vec{v}_o t + \frac{\vec{g}t^2}{2}.$$

Перейдем в систему отсчета, связанную со вторым камешком. Тогда относительное положение первого камешка задается вектором

$$\vec{S} = \Delta\vec{r}_1(t) - \Delta\vec{r}_2(t) = \vec{v}_o\Delta t + \frac{\vec{g}\Delta t^2}{2} + \vec{g}\Delta t \cdot t = \Delta\vec{r}_o + \vec{g}\Delta t \cdot t,$$



т.е. это движение вертикально вниз со скоростью $\vec{g}\Delta t$. Поэтому

1)если Δt таково, что первый камушек не успел опуститься ниже горизонта точки бросания (точка A_1), тогда наименьшее расстояние будет равно

$$CB_1 = (\Delta\vec{r}_o)_x = \left(\vec{v}_o\Delta t + \frac{\vec{g}\Delta t^2}{2}\right)_x = v_o \cos\alpha\Delta t. \ (1)$$

Оно будет достигнуто в момент, когда оба шарика будут на одной высоте, т.е.

$$S_y = 0 = (\Delta\vec{r}_o)_y - g\Delta t \cdot t = v_o \sin\alpha\Delta t - \frac{g\Delta t^2}{2} - g\Delta t \cdot t, \ t = \frac{v_o \sin\alpha}{g} - \frac{\Delta t}{2} \ (2).$$

2)если Δt таково, что первый камушек опустился ниже горизонта бросания (A_2), наименьшим расстоянием будет начальное, т.е.

$$OA_2 = |\Delta\vec{r}_o| = \sqrt{(v_o\cos\alpha\Delta t)^2 + \left(v_o\sin\alpha\Delta t - \frac{g\Delta t^2}{2}\right)^2}, \ (3)$$

а момент времени $t = 0$ (4)

Условие выбора ответа следует из (2): если $\Delta t > \frac{2v_o\sin\alpha}{g}$, то ответ – (3),(4),

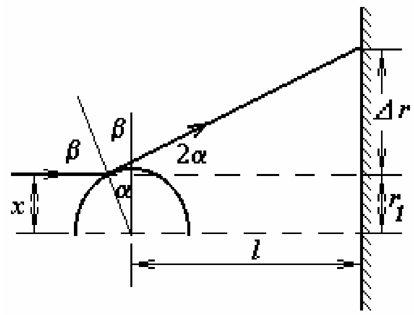
если $\Delta t < \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$, то – (1), (2)

<u>Решение 5.</u> Небольшая тень по центру означает, что шарик имеет размеры, ненамного превышающие диаметр пучка света (подумайте почему?). Рассмотрим крайний луч. Для него β – угол падения и $\alpha + \beta = \pi/2$. Следовательно, после отражения луч отклонится на угол 2α, причем

$$tg2\alpha = \frac{\Delta r}{x\sin\alpha + l}.$$

Ясно, что поскольку $\Delta r = 1$ см, а $l = 1$ м, то угол α – мал, и $x\sin\alpha$ можно опустить в знаменателе, тогда

$$tg2\alpha \approx 2\alpha \approx \Delta r/l; \Rightarrow \alpha \approx \Delta r/2l \approx 0,5\cdot10^{-2}$$



Как видно из рисунка

$$x = r_1\cos\alpha \approx r_1(1-\alpha^2/2)$$

Таким образом, диаметр шарика примерно равен 2 см (немного меньше).