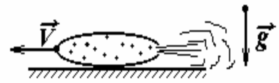
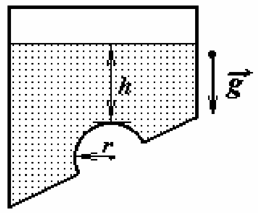
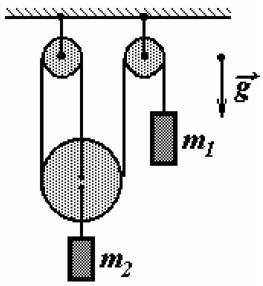
Условия задач. Теоретический тур.



1. На льду лежит баллон массой m = 20 кг, заполненный газом под давлением $p = 2\cdot10^6$ Па. В стенке баллона открывается отверстие площадью S = 1,0 см^2, из которого начинает бить горизонтальная струя газа. Найдите, с каким ускорением начнет скользить по льду баллон, если коэффициент трения о лед равен μ = 0,12.

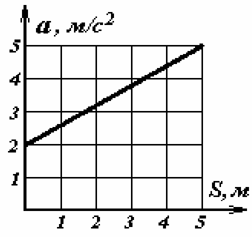


2. Веселый стеклодув изготовил несколько необычный сосуд: цилиндр радиусом R = 20 см, дно которого представляет собой наклонную плоскость, образующую угол α = 30^o с горизонтом. Но этого оказалось мало: в центре дна появилась «вмятина» радиусом r = 5,0 см. Нальем в сосуд воду до высоты h = 30 см над “вмятиной”. Найдите силу давления воды на «вмятину». Плотность воды $\rho = 1{,}0\cdot10^3$ кг/м^3.



3. Грузы массами m_1 = 500 г и m_2 = 100 г скреплены легкой нерастяжимой нитью с помощью системы легких и гладких блоков. Определите ускорения грузов после их отпускания.

4. Резистор в виде спирали с сопротивлением 160 Ом используют в качестве кипятильника, работающего от сети с напряжением 220 В. Будучи опущенным в трехлитровую банку с водой, он через достаточно большое время нагрел воду до температуры 45 ^{o}C. Как необходимо изменить длину спирали, чтобы при тех же условиях вода в банке закипела? Температура воздуха в комнате 20 ^{o}C.



5. Материальная точка движется в положительном направлении оси x с переменным ускорением, график зависимости которого от пройденного пути представлен на рисунке. Определите скорость точки при движении вблизи отметки 5 м, если в начальный момент скорость точки была 1,0 м/с.

Решения задач.

Решение 1. Задачу будем решать с использованием второго закона Ньютона. В проекции на горизонтальную ось имеем уравнение движения

$$F_1 - F_{тр} = ma. \ (1)$$

Силу F_1, являющейся суперпозицией всех сил давления газа на оболочку, найдем из условия равновесия оболочки без отверстия: $F_1 = ps$, где p – давление газа внутри баллона, а s – площадь отверстия. Сила трения равна μmg. Окончательно, ускорение в начальный момент времени равно

$$a = \frac{ps}{m} - \mu g. \ (2)$$

Подставка исходных данных дает результат: $a = 8{,}8$ м/с^2

Решение 2. Для решения задачи воспользуемся приемом дополнения. Заполним “вмятину” водой и закроем ее снизу крышкой, лежащей в плоскости остального дна. Ясно, что система будет в равновесии. Какие силы действуют на полусферу? Во-первых, сила тяжести $m\vec{g}$, во-вторых, сила реакции дна $\vec{N}$, равная по модулю силе давления всей жидкости на основании полусфер, в-третьих, это искомая сила $\vec{F}_g$ давления жидкости на “вмятину”.

Имеем:

$$\vec{F}_g + m\vec{g} + \vec{N} = 0. \ (1)$$

По правилу параллелограмма сила $\vec{F}_g$ по модулю равна диагонали параллелограмма, построенного на векторах $m\vec{g}$ и $\vec{N}$. По теореме косинусов

$$F_g = \sqrt{\left(mg^2 + N^2 - 2mgN\cos\alpha\right)}. \ (2)$$

Сила тяжести находится просто:

$$mg = \rho V g = \rho \frac{2}{3}\pi r^3 g. \ (3)$$

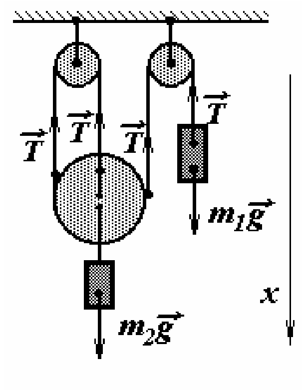
Для вычисления силы реакции опоры N надо использовать среднее значение давления на круглое основание данного объема.

$$N = \pi r^2 \rho g (h + r). \ (4)$$

Подставляя эти выражения в формулу (2), получим искомый ответ $F_g \approx 25$ Н.

Решение 3. Обозначим все силы и запишем проекции сил действующих на тела m_1 и m_2 в проекциях на ось x:

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a_1 \\ m_2 g - 3T = -m_2 a_2, \end{cases} \ (1)$$



Два уравнения содержат 3 неизвестные величины, поэтому необходимо еще установить связь между ускорениями первого и второго грузов. Несложно заметить, что подъем груза m_2 на высоту Δh за время Δt приведет к тому, что груз m_1 опуститься на $3\Delta h$ за это же время, т. е. $a_1 = 3a_2$. Теперь легко решить систему (1), исключив силу натяжения нити T:

$$a_2 = \frac{3m_1 - m_2}{9m_1 + m_2} g; a_1 = 3a_2.$$

Расчет дает: $a_2 = 9{,}0$ м/с^2, $a_1 = 3{,}0$ м/с^2.

Решение 4. Задача взята из практики – попробуйте обычным кипятильником закипятить воду в трехлитровой банке! Итак речь идет о рассеивании тепла в окружающее пространство. В состоянии термодинамического равновесия вся подводимая мощность рассеивается, т. е.

$$\frac{U^2}{R} = k(t - t_o), \ (1)$$

где k – некоторый постоянный коэффициент, зависящий от формы и размеров сосуда, свойств окружающей среды. Чтобы нагреть воду до $t_1 = 100\,^{\circ}\mathrm{C}$ нужно увеличить мощность подачи тепла в систему. Это означает уменьшить сопротивление

$$\frac{U^2}{R_1} = k(t_1 - t_o). \ (2)$$

Разделив (1) на (2), получим

$$\frac{R_1}{R} = \frac{t - t_o}{t_1 - t_o}. \ (3)$$

Поскольку R пропорционально l, то отношение $\frac{R_1}{R}$ равно отношению длин проволок.

Окончательно,

$$\frac{l_1}{l} = \frac{t - t_o}{t_1 - t_o} \ (4)$$

или в числах $\frac{R_1}{R} = 0{,}31.$ Следовательно, правильный ответ таков: длину спирали надо уменьшить на 69 % и более, так как на самом деле в (12) – (14) знак равенства нужно заменить на соответствующие знаки $\geq$ и $\leq$.

Решение 5. Задача решается весьма просто, если обратить внимание, на то, что площадь под кривой ускорения в зависимости от пути численно равна половине разности квадратов скоростей:

$$aS = \frac{v^2 - v_o^2}{2}. \quad (1)$$

Это очевидно для равноускоренного движения; для переменного движения достаточно разбить весь график на маленькие прямоугольники и просуммировать их площади. Другими словами, если усреднить ускорение по пути (значение $< a >= 3{,}5$ м/с^2 обозначено на рисунке пунктиром), то из (1) следует окончательное выражение:

$$v = \sqrt{v_o^2 + 2 < a > S}\,,$$

численное значение $v = 6{,}0$ м/с.