

*Республиканская  
физическая  
олимпиада  
(III этап)*

*2007 год*

*Теоретический тур  
Решения задач*

Задача 1. «Взрывная эмиссия»

50

1. Концентрация электронов. 2

Один моль платины имеет массу  $\mu$  и занимает объем  $V = \frac{\mu}{\rho}$ , при этом в нем находится  $N_A$  атомов. Если от каждого атома в зону проводимости перешел один электрон, то в одном моле платины будет  $N_A$  электронов, а их концентрация будет равна

$$n = \frac{N_A}{V_m} = \frac{N_A \rho}{\mu} \quad (1)$$

$$n = 6,62 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3} \quad (2)$$

При такой большой концентрации электроны не покидают металл, потому что на них действуют силы притяжения со стороны положительно заряженных ионов металла. Другими словами, энергия электронов в металле меньше, чем их энергия в вакууме.

Для того чтобы электрон покинул металл, надо сообщить ему дополнительную энергию, например, повысив температуру металла. Эмиссию электронов под действием электрического поля позволяет объяснить только квантовая механика.

2. Электрическое поле. 3

Точное нахождение электрического поля вблизи поверхности металла при известном потенциале – достаточно сложная задача, но приближенно можно показать связь напряженности и потенциала на примере металлической сферы. Если на сфере радиусом  $r$  находится заряд  $Q$ , то напряженность электрического поля у поверхности

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

а потенциал

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Как видно,

$$E = \frac{\varphi}{r} \quad (3)$$

Вблизи острия металлической иглолки данное равенство выполняется только приближенно, но можно использовать его для оценки напряженности электрического поля.

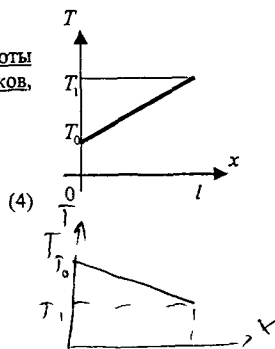
3. Теплопроводность. 3

3.1 Так как стержень однородный и нет источников теплоты внутри стержня, то поток теплоты в любом сечении его одинаков, т.е.

$$q = -\kappa \frac{dT}{dx} = \text{const}$$

$$\frac{dT}{dx} = C$$

$$\int_{T_0}^T dT = C \int_0^x dx$$



$$T(x) = T_0 + Cx,$$

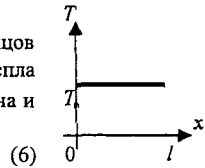
причем на торце  $x = l$   $T(l) = T_1$ , поэтому  $C = \frac{T_1 - T_0}{l}$

$$T(x) = T_0 + \frac{x}{l}(T_1 - T_0) \quad (5)$$

График этой зависимости – прямая линия

3.2 Если стержень теплоизолирован и на одном из концов поддерживается постоянная температура  $T_0$ , то никакого потока тепла в этом стержне нет и температура по всей длине стержня постоянна и равна

$$T(x) = T_0$$



3.3 Поскольку стержень теплоизолирован, то в установившемся режиме (то есть, когда температура перестанет изменяться) для теплового баланса необходимо, чтобы вся теплота, выделяющаяся правее некоторой точки  $x$  стержня (то есть, с части стержня длиной  $l - x$ ), отводилась путем теплопередачи

Уравнение теплового баланса

$$P_{\text{мех}} + qS = 0$$

$$(l-x)Sw - \kappa \frac{dT}{dx} S = 0$$

$$\frac{dT}{dx} = (l-x) \frac{w}{\kappa}$$

$$\int_{T_0}^T dT = \int_0^x \frac{w}{\kappa} (l-x) dx$$

$$T(x) = T_0 + \frac{w}{\kappa} lx - \frac{w}{\kappa} \frac{x^2}{2} = T_0 + \frac{w}{\kappa} x(l - \frac{x}{2})$$

Температура правого торца стержня равна

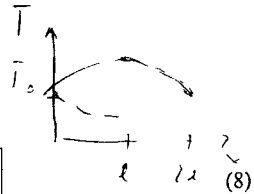
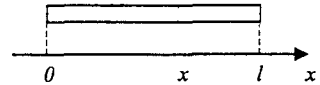
$$T_l = T_0 + \frac{wl^2}{2\kappa} \quad (9)$$

3.4 Если по стержню течет ток плотностью  $j$ , то по закону Джоуля-Ленца в дифференциальной форме в единице объема в единицу времени выделяется теплота

$$w = \gamma j^2 \quad (10)$$

Соответственно, температура правого торца стержня будет равна

$$T_l = T_0 + \frac{\gamma j^2 l^2}{2\kappa} \quad (11)$$



4. Эмиссия электронов.

2

4.1 Зависимость  $J(T) = \begin{cases} a, & T < b \\ a + k(T-b), & T \geq b \end{cases}$

кусочно-линейная, причем коэффициент  $a$  показывает, насколько график приподнят над осью абсцисс, коэффициент  $b$  показывает температуру излома, а коэффициент  $k$  - угловой коэффициент для наклонного участка графика. С ростом напряженности электрического поля вблизи поверхности металла коэффициент  $a$  увеличивается, коэффициент  $b$  уменьшается, а коэффициент  $k$  увеличивается.

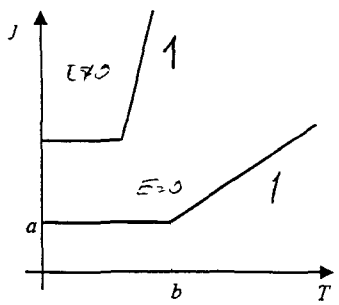


График зависимости  $J(T)$  при двух значениях напряженности показан на рисунке

8

4.2 Если потенциал катода равен  $\phi = -50 \cdot 10^3 \text{ В}$ , то напряженность поля вблизи острия иглолки равна  $E = 5 \cdot 10^9 \text{ В/м}$ . Значения коэффициентов равны  $a = 4,06 \cdot 10^7 \text{ А/м}^2$ ,  $b = 1900 \text{ К}$ ,  $k = 3,49 \cdot 10^4 \text{ А/м}^2 \text{ К}$

1

Тепло, выделяющееся в иглолке при протекании по ней тока, вызывает нагрев В установившемся режиме вся выделяющаяся теплота отводится за счет теплопередачи При протекании тока плотностью  $J$  температура острия будет равна  $T = T_0 + \frac{\gamma J^2 l^2}{2\kappa}$  (см п 3.4)

Можем выразить плотность тока в зависимости от температуры острия

$$J = \sqrt{\frac{2\kappa}{\gamma l^2} (T - T_0)}$$

Смысл этого соотношения чтобы температура острия была равна  $T$ , по иглолке должен течь ток плотностью  $J$

Поскольку эмиссия происходит с поверхности полусферы площадью  $2\pi r^2$ , а поперечное сечение иглолки равно  $\pi r^2$ , при этом сила тока одинакова что внутри иглолки, что с поверхности острия, то плотность тока внутри иглолки и на поверхности острия отличаются в два раза.

1

$$\begin{aligned} \pi r^2 J_{\text{внутри}} &= 2\pi r^2 J_{\text{поверхн}} \\ J_{\text{внутри}} &= 2 J_{\text{поверхн}} \end{aligned} \quad (12)$$

Соответственно, для того, чтобы температура острия была равна  $T$ , с поверхности должен стекать такой ток, что

$$\begin{aligned} 2J_{\text{поверхн}} &= \sqrt{\frac{2\kappa}{\gamma l^2} (T - T_0)} \\ J_{\text{поверхн}} &= \sqrt{\frac{\kappa}{2\gamma l^2} (T - T_0)} \end{aligned}$$

Для удобства дальнейшей работы обозначим коэффициент  $\chi = \sqrt{\frac{\kappa}{2\gamma l^2}} = 3,61 \cdot 10^7 \text{ А/м}^2 \text{ К}^{1/2}$

Плотность тока эмиссии  $J_1$  определяется температурой острия  $T$

$$j_1(T) = \begin{cases} a, & T < b \\ a + k(T - b), & T \geq b \end{cases}$$

А плотность тока  $j_2$ , который должен стекать с острия, чтобы на нем была температура  $T$ , определяемая теплопередачей

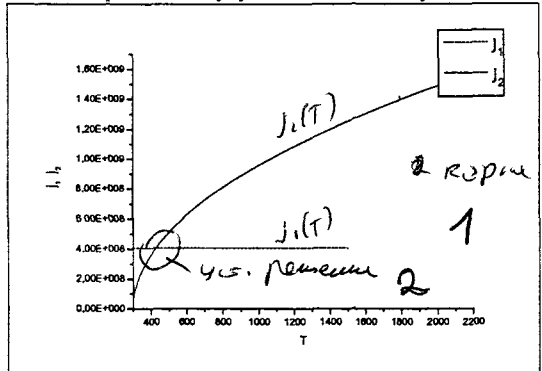
$$j_2(T) = \chi \sqrt{T - T_0}$$

Очевидно, что это одна и та же плотность тока, поэтому температура стационарного состояния определяется уравнением

$$j_1(T) = j_2(T) \quad (13)$$

Построим обе функции на графике, точки пересечения будут соответствовать решениям

Решения два. Рассмотрим первое, которое соответствует меньшей температуре. Если вдруг случайно температура увеличится, то плотность тока эмиссии не изменится, а вот потери теплоты возрастут (для поддержания температуры требуется большая плотность тока), и острие иглолки начнет охлаждаться. Если вдруг температура острия уменьшится, то потери теплоты тоже уменьшатся, но ток эмиссии будет тем же, поэтому иглолка начнет нагреваться. Это решение устойчиво, потому что отклонения температуры от стационарной приводят к процессам, возвращающим иглолку к равновесной температуре.



Решение же, соответствующее большей температуре, неустойчиво. Стоит только температуре случайно увеличиться, как ток эмиссии станет больше, а увеличение потерь теплоты не сможет компенсировать увеличение выделяющегося джоулева тепла. Это приведет еще большему разогреву иглолочки – температура уходит от равновесного значения.

На практике, если не создать специальных условий, при небольших плотностях тока реализуется только устойчивое решение, ведь нагрев иглолки от комнатной температуры производится при помощи протекающего тока.

Найдем это значение температуры  $T_i$ . Условие (13) превращается в

$$a = \chi \sqrt{T_i - T_0}$$

$$T_i = T_0 + \frac{a^2}{\chi^2} \quad (14)$$

$$T_i = 301,3K \quad (15)$$

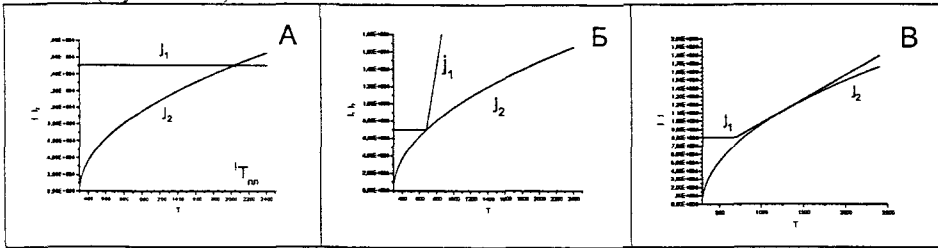
**Примечание.**

Не обязательно строить именно графики  $j_1(T)$  и  $j_2(T)$ , можно построить их квадраты, но рассуждения при этом будут аналогичными, и численные ответы получатся такими же.

43 Значения коэффициентов  $a, b, k$  зависят от напряженности электрического поля, соответственно, от потенциала катода. При некотором значении потенциала возникнет критическая ситуация, когда потери тепла на теплопроводность не смогут остановить разогрев, температура достигнет температуры плавления и наступит разрушение острия.

(сначала е)

иголки Это может наступить, если устойчивое решение уравнения (13) станет равным температуре плавления (случай А) или если  $J_1(T) \geq J_2(T)$  для любой температуры  $T$ , что соответствует касанию графиков в одной точке, что может произойти двумя способами (случай Б и В)



Выясним, какой случай реализуется в нашей задаче. Реализоваться может только один из трех возможных случаев, поскольку функции  $a(E), b(E), k(E)$  монотонные, причем  $a(E), k(E)$  экспоненциально быстро возрастают

График  $J_1(T)$  - это «уголок» Выясним, какие положения на графике может занимать вершина угла. При напряженности электрического поля  $E$  положение вершины угла на графике - это точка  $(b(E), a(E))$ .

Система

$$a = a_1 \exp(a_2 E)$$

$$b = b_1 - b_2 E$$

задает положение вершины «уголка» в параметрическом виде Можно построить по точкам график возможных положений вершины угла, задавая разные значения напряженности электрического поля Можно заметить, что коэффициент  $b$ , у которого размерность температуры, линейно связана с  $E$ , поэтому

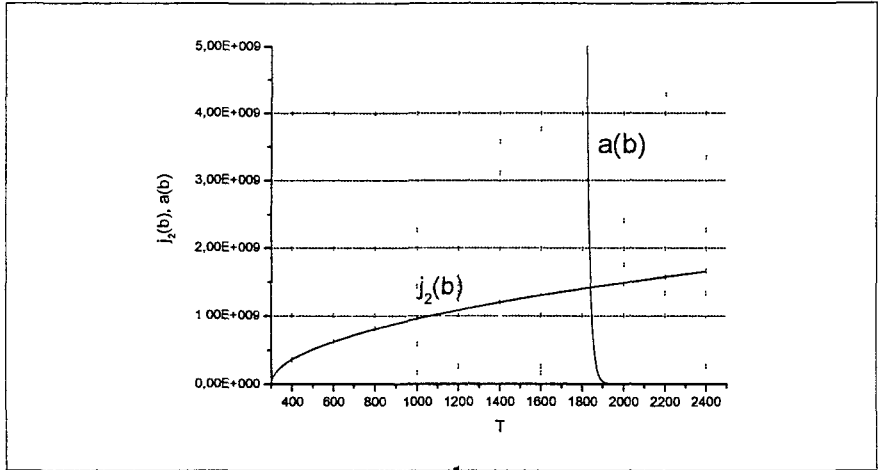
$$E = \frac{b_1 - b}{b_2}$$

$$a = a_1 \exp\left(\frac{a_2}{b_2}(b_1 - b)\right)$$

Построим на одном графике  $J_2(b)$  и  $a(b)$ .

2 -  
4.1.1.4  
B. 2. 1. 4

2



По графику сразу видно, что случай А в этой задаче не реализуется, поскольку вершина уголка пересекает график  $j_2(b)$  при температуре, меньшей температуры плавления платины  $T_m = 2045K$ .

Скорее всего, мы имеем дело со случаем Б, но это надо доказать. Для того чтобы действительно реализовался случай А, необходимо, чтобы вершина уголка совпадала с одной из точек  $J_2(T)$ , то есть

$$b = T^*$$

$$a = \chi \sqrt{T^* - T_0}$$

и график  $J_1(T)$  шел круче, чем  $J_2(T)$ , то есть

1

$$k > \frac{dj_2}{dT} \Big|_{T=T^*} = -\frac{\chi}{2\sqrt{T^* - T_0}} \quad (16)$$

Температуру, соответствующую решению  $T^*$ , можно найти графически, если аккуратно построить график, а можно найти аналитически, ведь

$$a = a_1 \exp\left(\frac{a_2}{b_2}(b_1 - b)\right).$$

Тогда

$$\chi \sqrt{T^* - T_0} = a_1 \exp\left(\frac{a_2}{b_2}(b_1 - T^*)\right)$$

$$T^* = T_0 + \frac{a_1^2}{\chi^2} \exp\left(\frac{2a_2}{b_2}(b_1 - T^*)\right).$$

3

Это уравнение аналитически не решается, но можно воспользоваться методом последовательных приближений. При этом необходимо соблюдать осторожность, поскольку использование метода по формуле  $T^{(k+1)} = T_0 + \frac{a_1^2}{\chi^2} \exp\left(\frac{2a_2}{b_2}(b_1 - T^{(k)})\right)$  не дает решение, потому что метод расходится. Необходимо сделать небольшие математические преобразования и применять метод по формуле  $T^{(k+1)} = \left(b_1 - \frac{b_2}{2a_2} \ln\left(\frac{\chi^2}{a_1^2}(T^{(k)} - T_0)\right)\right)$ .

Метод очень быстро сходится и даже если взять начальное приближение  $T^{(0)} = 1800K$ , уже после первой итерации получается правильный ответ

$$T^* = 1840,8K \quad \text{[и т.д.]} \quad (17)$$

Эта температура соответствует напряженности электрического поля

$$E^* = \frac{b_1 - T^*}{b_2} = 8,5 \cdot 10^9 \text{ В/м}$$

при этом величина критического потенциала равна (с точностью до знака)

$$\varphi_{\text{крит}} = 85 \text{ кВ} \quad (18)$$

Но ещё необходимо проверить условие () При напряженности поля  $E^* = 8,5 \cdot 10^9 \text{ В/м}$ , коэффициент  $k = 9,33 \cdot 10^5 \text{ А/м}^2 \text{ К}$ , а  $\frac{\chi}{2\sqrt{T^* - T_0}} = 4,60 \cdot 10^5 \text{ А/м}^2 \text{ К}$ .

Поскольку

$$k > \frac{dj_2}{dT}|_{T=T^*} = \frac{\chi}{2\sqrt{T^* - T_0}} \quad (19)$$

то действительно реализуется случай Б.

4.4 При подаче на катод потенциала  $\varphi = 130 \text{ кВ}$  напряженность электрического поля вблизи острия принимает значение  $E = 1,3 \cdot 10^{10} \text{ В/м}$ . Значения коэффициентов при данной напряженности равны  $a = 1,31 \cdot 10^{11} \text{ А/м}^2$ ,  $b = 1721 \text{ К}$ ,  $k = 6,39 \cdot 10^7 \text{ А/м}^2 \text{ К}$ .

Плотность тока сразу после включения, пока иглолка не успела разогреться до температуры  $b$ , равняется

$$j_1 = a = 1,31 \cdot 10^{11} \text{ А/м}^2 \quad (20)$$

Но даже при температуре плавления платины плотность тока

$$j_2 = 1,51 \cdot 10^9 \text{ А/м}^2 \quad (21)$$

что на два порядка меньше начальной плотности тока  $j_1$ . Это означает, что потерями теплоты на теплопроводность можно пренебречь и считать иглолку полностью теплоизолированной.

Выделяющаяся джоулева теплота идет только на нагревание иглолки. В таком случае уравнение теплового баланса

$$cm\Delta T = P_{\text{дж}}\Delta t \\ c\rho V\Delta T = \gamma j^2 V\Delta t$$

В дифференциальном виде

$$dt = \frac{c\rho}{\gamma j^2(T)} dT \\ t = \frac{c\rho}{\gamma} \int_{T_0}^{T^*} \frac{dT}{j^2(T)} \quad (22)$$

Поскольку  $j(T)$  - кусочно-линейная функция, то интеграл надо считать отдельно до точки  $b$  и после неё.

$$t_1 = \frac{c\rho}{\gamma} \int_{T_0}^b \frac{dT}{a^2} = \frac{c\rho}{\gamma a^2} (b - T_0)$$



$$t_2 = \frac{c\rho}{\gamma} \int_b^{T_m} \frac{dT}{[a+k(T-b)]^2} = \frac{c\rho}{\gamma k} \int_b^{T_m} \frac{d[a+k(T-b)]}{[a+k(T-b)]^2} = -\frac{c\rho}{\gamma k} \frac{1}{[a+k(T-b)]} \Big|_b^{T_m} = \frac{c\rho}{\gamma k} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{[a+k(T_m-b)]} \right)$$

Время до взрыва равно

$$t = \frac{c\rho}{\gamma a^2} (b - T_0) + \frac{c\rho}{\gamma k} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{[a+k(T_m-b)]} \right) \quad (23)$$

$$t = 2,6 \cdot 10^{-6} \text{ c} = 2,6 \text{ мкс} \quad (24)$$

В течение времени до взрыва с острого иголки идет достаточно большой ток. Явление взрывной эмиссии используют в генераторах очень мощных и очень коротких импульсов тока

2  
1

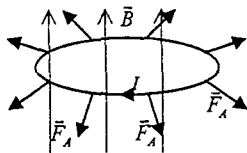
## Задача 2 «Динамика»

50

### 1. Сила Ампера.

Очевидно, что если катушка с током находится в однородном вертикальном магнитном поле, то равнодействующая сил Ампера, действующих на разные части катушки, равна нулю

Для возникновения ненулевой вертикальной составляющей силы Ампера необходимо, чтобы существовала радиальная составляющая магнитного поля — магнитное поле должно быть неоднородным (1)



Определим радиальную составляющую магнитного поля. Выделим в пространстве воображаемый цилиндр, совпадающий с катушкой, высотой  $\Delta z$  и радиусом  $r$ . Полный магнитный поток через замкнутую поверхность цилиндра равен нулю

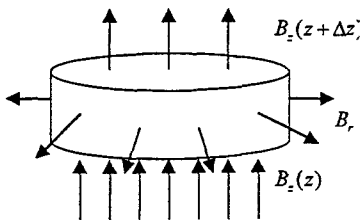
$$\Phi_B = 0.$$

$$B_z(z + \Delta z)\pi r^2 + B_r 2\pi r \Delta z - B_z(z)\pi r^2 = 0$$

$$\text{Отсюда } B_r = \frac{B_z(z) - B_z(z + \Delta z)}{2\Delta z} r = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}.$$

$$B_r = \frac{\alpha B_0 r}{2}$$

(2)



Тогда вертикальная составляющая силы Ампера, действующая на катушку, равна

$$F_A = 2\pi r N I B_r = 2\pi r N I \frac{\alpha B_0 r}{2} = \alpha B_0 \pi r^2 N I \quad (3)$$

Поскольку магнитное поле симметрично относительно оси  $Oz$ , равнодействующая горизонтальных составляющих силы равна нулю

### 2. Амплитуда колебаний.

Переменное напряжение, поданное на клеммы катушки, вызовет переменный ток в катушке, на нее начнет действовать сила Ампера, и катушка придет в движение. Рассмотрим силы, действующие на катушку.

1) Если собственная частота колебаний системы равна  $\omega_0$ , то при отклонении катушки из положения равновесия на небольшое расстояние  $z$ , на нее будет действовать упругая возвращающая сила

$$F_{\text{упр}} = -kz = -m\omega_0^2 z.$$

Собственная частота колебаний для катушки равна  $\omega_0 = 2\pi f_0 = 188\text{с}^{-1}$ .

2) Как было сказано в условии, при движении мембраны вместе с катушкой, создаются звуковые волны, при этом на мембрану действует сила сопротивления

$$F_{\text{сопр}} = -\beta v.$$

В данном случае коэффициент  $\beta = \frac{2\gamma P_0 S}{c} = 26,4 \text{ кг/с}$ .

3) И ещё на катушку будет действовать сила Ампера, направление которой зависит от способа намотки катушки и направления тока в ней. Для определенности будем считать, что при приложении положительного постоянного напряжения ток течет так, что сила Ампера направлена вверх.

$$F_A = \alpha B_0 \pi r^2 N I.$$

Для удобства обозначим постоянный множитель перед силой тока  $g = \alpha B_0 \pi r^2 N$ . В данном случае  $g = 3,14 \frac{H}{A}$ .

2 По второму закону Ньютона 
$$m\ddot{a} = \vec{F}_{mp} + \vec{F}_{сопр} + \vec{F}_A \quad (4)$$

1 
$$m\ddot{a} = -m\omega_0^2 z - \beta \dot{v} + gI \quad (5)$$

(точками сверху обозначены соответствующие производные по времени).

Рассмотрим, как связаны между собой сила тока и прикладываемое к катушке напряжение.

1) Внешняя ЭДС, прикладываемая к катушке равна

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t.$$

2) Переменное напряжение вызывает переменный ток, и в катушке, обладающей индуктивностью  $L$ , возникает ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_{cu} = -L \frac{dI}{dt}.$$

3) При движении катушки в магнитном поле, магнитный поток через нее изменяется, что приводит к возникновению ЭДС индукции

$$\varepsilon_{инд} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(N\pi r^2 B_0(1 - \alpha z)) = \alpha B_0 \pi r^2 N \frac{dz}{dt} = g\dot{z}$$

По закону Ома для полной цепи

$$RI = \varepsilon + \varepsilon_{cu} + \varepsilon_{инд} \quad (6)$$

$$RI = -L \frac{dI}{dt} + g\dot{z} + \varepsilon$$

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \varepsilon(t) + g\dot{z} \quad (7)$$

Итого, получилась система из двух связанных дифференциальных уравнений

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + m\omega_0^2 z = gI$$

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \varepsilon(t) + g\dot{z}$$

Нас интересует решение, которое установится, в конце концов, при периодической внешней ЭДС  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t$ . Ясно, что когда собственные колебания затухнут, сила тока и координата будут изменяться по гармоническому закону с такой же частотой, но другой начальной фазой

В принципе, можно точно решить это уравнение, подставив в систему дифференциальных уравнений

$$I = I_0 \cos(\omega t + \phi),$$

$$z = A \cos(\omega t + \psi),$$

потом, продифференцировав, разложив тригонометрические функции и приравняв коэффициенты при соответствующих синусах и косинусах, но это даст систему из четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными, решение которой весьма получится достаточно громоздким и отнимет много времени и сил. Но нетрудно заметить, что в если ток изменяется по закону  $I = I_0 \cos(\omega t + \phi)$ , то амплитуда слагаемого  $RI$  будет

равна  $RI_0$ , а амплитуда слагаемого  $L \frac{dI}{dt}$  будет равна  $\omega LI_0$ . Даже на предельной для человеческого уха частоте  $f \approx 20 \text{ кГц}$  величина  $\omega L = 0.12 \text{ Ом}$ , тогда как

$R = 4,0 \text{ Ом} \square 0,12 \text{ Ом}$  Поэтому слагаемым  $L \frac{dI}{dt}$  можно пренебречь, и система уравнений превращается в 2

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + m\omega_0^2 z = gI$$

$$I = \frac{\varepsilon(t) + g\dot{z}}{R}$$

Подставив ток в первое уравнение, получим обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами – уравнение вынужденных колебаний с затуханием:

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + m\omega_0^2 z = g \frac{\varepsilon(t) + g\dot{z}}{R}$$

$$m\ddot{z} + \left( \beta - \frac{g^2}{R} \right) \dot{z} + m\omega_0^2 z = \frac{g}{R} \varepsilon_0 \cos \omega t$$

$$\ddot{z} + \frac{1}{m} \left( \beta - \frac{g^2}{R} \right) \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{g\varepsilon_0}{mR} \cos \omega t$$

Для удобства обозначим  $\chi = \frac{1}{m} \left( \beta - \frac{g^2}{R} \right)$ ,  $D = \frac{g\varepsilon_0}{mR}$ .

Значение коэффициента  $\chi = 479 \text{ с}^{-1}$ . Значение коэффициента  $D = 15,7 \text{ м/с}^2$  при амплитуде внешнего напряжения  $\varepsilon_0 = 1 \text{ В}$ .

Дифференциальное уравнение принимает вид

$$\ddot{z} + \chi\dot{z} + \omega_0^2 z = D \cos \omega t \quad (8) \quad 2$$

Нас интересует амплитуда напряжения. Решить это дифференциальное уравнение можно разными способами: подстановкой  $z = A \cos(\omega t + \psi)$ , методом векторных диаграмм или методом комплексных амплитуд – это дело вкуса. В результате получается

$$A(\omega) = \frac{D}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi\omega)^2}} \quad (9)$$

Если подставить выражения для всех коэффициентов, то получится весьма громоздкое выражение 5

$$A(\omega) = \frac{\alpha B_0 \pi r^2 N \varepsilon_0}{mR} \cdot \left[ (\omega^2 - (2\pi f_0)^2)^2 + \left( \frac{1}{m} \left( \frac{2\gamma P_0 S}{c} - \frac{(\alpha B_0 \pi r^2 N)^2}{R} \right) \omega \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (10)$$

или

поэтому допустимо оставить выражение для амплитуды в более простом виде (9), предварительно оценив все коэффициенты.

При вынужденных колебаниях с затуханием на некоторой частоте вблизи собственной наблюдается резонанс (максимум амплитуды), который наступает при минимуме знаменателя.

$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi\omega)^2 = \min$$

Исследуем выражение на экстремум стандартным способом.

$$\frac{d}{d\omega} [(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi\omega)^2] = 0$$

$$2(\omega^2 - \omega_0^2)2\omega + 2\chi^2\omega = 0$$

$$(\omega^2 - (\omega_0^2 - \chi^2/2))\omega = 0$$

Вторая производная исследуемой функции равна

$$\frac{d}{d\omega}[(\omega^2 - (\omega_0^2 - \chi^2/2))\omega] = 3\omega^2 - (\omega_0^2 - \chi^2/2)$$

У этого уравнения 3 корня  $\omega_1 = 0$  и  $\omega_{2,3} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - \chi^2/2}$ , правда, отрицательный корень физического смысла в себе не несет

При небольшом затухании ( $\omega_0^2 > \chi^2/2$ ) в точке  $\omega_1 = 0$  локальный максимум (соответственно, минимум амплитуды), ведь вторая производная меньше нуля, а в точке  $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - \chi^2/2}$  - локальный минимум (соответственно максимум амплитуды)

В случае же сильного затухания ( $\omega_0^2 < \chi^2/2$ ) ситуация коренным образом меняется, поскольку уравнение  $(\omega^2 - (\omega_0^2 - \chi^2/2))\omega = 0$  имеет только один действительный корень  $\omega_1 = 0$ , причем вторая производная в этой точке больше нуля, что означает минимум выражения и максимум амплитуды. Таким образом, при сильном затухании резонанса не наблюдается, и максимальная амплитуда соответствует нулевой частоте

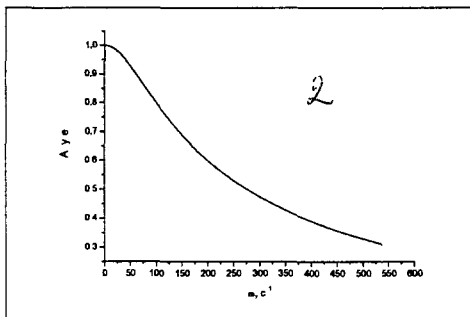
В нашем случае  $\omega_0 = 188\text{с}^{-1}$ , а  $\chi = 479\text{с}^{-1}$ , соответственно мы имеем дело со случаем сильного затухания

( $\omega_0^2 < \chi^2/2$ ), поэтому максимум амплитуды приходится на нулевую частоту и примерный график зависимости должен выглядеть так, как изображено на рисунке

На частоте  $f_0 = 30\text{Гц}$  ( $\omega_0 = 188\text{с}^{-1}$ ) амплитуда равна

$$A = \frac{D}{(\chi\omega_0)}$$

$$A = 1,74 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,174 \text{ мм} \quad (12)$$



Характерная зависимость амплитуды колебаний катушки от частоты напряжения (11)

### 3. Звуковая мощность.

Как было сказано в условии, в связи с генерацией звуковых волн на мембрану действует сила сопротивления  $F_{\text{сопр}} = -\beta v$ . Это значит, что мощность  $P_{\text{зв}}^{\text{мгнов}} = \beta v^2 = \beta z^2$  идет на создание звука. Таким образом, мгновенная звуковая мощность

$$P_{\text{зв}}^{\text{мгнов}} = \beta v^2 = \beta[-\omega A \sin(\omega t + \psi)]^2 = \frac{\beta \omega^2 D^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi \omega)^2} \sin^2(\omega t + \psi) \quad (13)$$

Это мгновенная мощность, но с практической точки зрения нас интересует средняя звуковая мощность, поэтому надо усреднить мгновенную мощность по периоду. Как известно, среднее значение  $\sin^2(\omega t + \psi)$  по периоду равно  $1/2$ . Итого,

$$P_{\text{зв}}(\omega) = \frac{\beta D^2}{2} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi \omega)^2} \quad (14)$$

Исследуем  $P_{\text{зв}}(\omega)$  на максимум

$$\frac{d}{d\omega} \left[ \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi\omega)^2} \right] = \frac{2\omega((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi\omega)^2) - \omega^2(2(\omega^2 - \omega_0^2)2\omega + 2\chi^2\omega)}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi\omega)^2]^2} = 0$$

$$\omega[\omega^4 + \omega_0^4 - 2\omega^2\omega_0^2 + \chi^2\omega^2 - 2\omega^4 + 2\omega_0^2\omega^2 - \chi^2\omega^2] = 0$$

$$\omega(\omega_0^4 - \omega^4) = 0$$

$$\omega(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega_0^2 + \omega^2) = 0$$

Физический смысл имеют решения  $\omega_1 = 0$  (соответствует минимуму мощности) и  $\omega = \omega_0$  (соответствует максимуму мощности). Итак, звуковая мощность максимальна на частоте

$$\omega = \omega_0 = 188\text{с}^{-1}, \quad (15) \quad 3$$

при этом мощность равна

$$P_{\text{э макс}} = \frac{BD^2}{2\chi^2} = 0.0142\text{Вт}. \quad (16) \quad 1$$

Потребляемая электрическая мощность  $P_{\text{эл}} = \varepsilon(t)I(t)\cos\phi$ , где  $\phi$  - сдвиг фаз между током

и напряжением. Сила тока  $I = \frac{\varepsilon(t) + g\dot{z}}{R}$ .

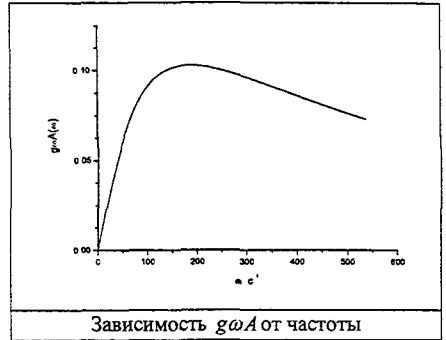
Оценим величину  $g\dot{z} = -gA\omega\sin(\omega t + \psi)$ .

Пренебречь ей можно, если амплитуда  $gA$  будет много меньше  $\varepsilon_0$ . Как видно по графику, с ростом частоты  $\omega$  амплитуда  $A(\omega)$  убывает, причем при больших частотах обратно пропорционально квадрату частоты. При малых частотах  $\omega A$  мало, при больших тоже мало, а в средних частотах имеет максимум. Выражение

$$gA = \frac{Dg\omega}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi\omega)^2]^{1/2}} \text{ ведет себя}$$

так, как изображено на рисунке.

Для оценки можно воспользоваться рассчитанным в предыдущем пункте значением  $A$  на частоте  $\omega_0 = 188\text{с}^{-1}$ .



$$g\omega_0 A(\omega_0) = 0.103\text{В}$$

Поскольку в условии требуется не найти, а оценить величину КПД, можем пренебречь величиной  $g\omega_0 A(\omega_0) = 0.103\text{В}$  по сравнению с  $\varepsilon_0 = 1\text{В}$ , что приведет к тому, что значение КПД получится чуть завышенным.

Тогда потребляемая мгновенная мощность  $P_{\text{эл}}^{\text{мгнов}} = \frac{\varepsilon_0^2 \cos^2(\omega t)}{R}$ , а среднее значение потребляемой мощности

$$P_{\text{эл}} = \frac{\varepsilon_0^2}{2R}. \quad (17) \quad 1$$

Потребляемая электрическая мощность равна  $P_{\text{эл}} = 0.125\text{Вт}$ .

Максимальный КПД равен

$$\eta_{\text{max}} = \frac{P_{\text{э макс}}}{P_{\text{эл}}} = 0.113 \quad (18) \quad 1$$

Для нахождения граничных частот рабочего диапазона надо решить уравнение

1

$$P_{\text{з}}(\omega_{n,s}) = \frac{P_{\text{з}}^{\text{max}}}{2} \quad (19)$$

$$\frac{\beta D^2}{2} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi\omega)^2} = \frac{1}{2} \frac{\beta D^2}{2\chi^2}$$

$$\omega^4 - (2\omega_0^2 + \chi^2)\omega^2 + \omega_0^4 = 0$$

1

$$\omega_{n,s} = \sqrt{(\omega_0^2 + \chi^2/2) \pm \chi \sqrt{\omega_0^2 + \chi^2/4}} \quad (20)$$

Верхняя граничная частота равна

$$\omega_s = 544 \text{ с}^{-1} \text{ или } f_s = 86,6 \text{ Гц}. \quad (21a)$$

Нижняя граничная частота равна

$$\omega_n = 65,0 \text{ с}^{-1} \text{ или } f_n = 10,3 \text{ Гц}. \quad (21б)$$

График зависимости звуковой мощности от частоты переменного напряжения изображен на рисунке.

Как видно, исследованный нами динамик хорошо подходит для воспроизведения низких частот (басов).

