А.В. Андриевский
А.А. Мищук
Л.Г. Маркович
А.И. Слободянюк

Республиканская физическая олимпиада

Теоретический тур
Решения задач

г. Минск
2007 год.

10 класс.

1.1 Варистор.

Для начала необходимо определить, какое напряжение было на нагрузке до скачка напряжения Сопротивление параллельно соединенных резистора и варистора не может превышать $10 Ом$, поэтому и падение напряжения на этом участке будет на более 4В Заметим, что при таком напряжении через варистор течет очень маленький ток, т е его сопротивление очень большое и сопротивление этого участка в точности определяется сопротивлением нагрузки Значит, до скачка на нагрузке было напряжение

$$U_{H0} = \frac{U_0}{R + R_H} R_H = 4B \tag{1}$$

Обозначим ток в цепи после скачка $I_Ц$ Общее напряжение есть сумма падений напряжения на резисторе R и напряжения на варисторе U

$$RI_Ц + U = U_1 \tag{2}$$

Ток в цепи есть сумма токов, текущих через нагрузку и варистор I

$$I_Ц = \frac{U}{R_H} + I \tag{3}$$

Поставляя это значение в (2) и используя численные значения U_1, R и R_H, получим уравнение, связывающее ток и напряжение на варисторе

$$I = 2{,}4 - \frac{3}{20} U \tag{4}$$

С другой стороны связь между током и напряжением приведена на графике Чтобы определить U и I необходимо найти точку пересечения графика, приведенного в условии с графиком ВАХ

Результат представлен на рис 1

Значения напряжения на варисторе, а значит и на нагрузке

$$U = U_{H2} = 8{,}2B \tag{5}$$

Т е напряжение на нагрузке возрастет чуть больше чем в два раза

$$\frac{U_{H2}}{U_{H1}} \approx 2 \tag{6}$$

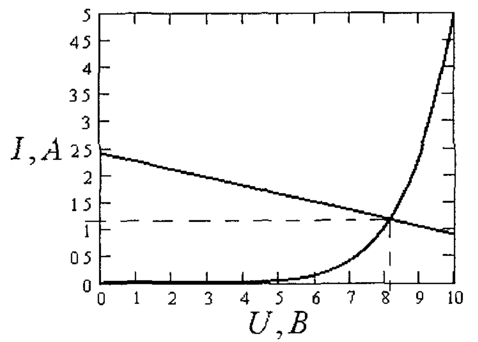


Рис 1

1.2 «Гидроподушка»

Пусть струя воды площадью поперечного сечения S со скоростью υ неупруго сталкивается со стенкой (рис 3) За промежуток времени Δt стенки достигнут частицы воды в цилиндре высотой $h = \upsilon \Delta t$ и площадью поперечного сечения S.

Соответственно, масса воды $m = \rho V = \rho Sh = \rho S \upsilon \Delta t$, содержащаяся в этом цилиндре, передаст стенке импульс $\Delta p = m\upsilon = \rho S \upsilon^2 \Delta t$, поскольку после столкновения ее импульс станет равным нулю.

Из второго (в импульсной форме) и третьего законов Ньютона для силы давления струи на стенку имеем

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \rho S \upsilon^2. \tag{6}$$

Однако в рассматриваемом случае струи воды бьют вверх, уменьшая свою скорость по мере подъема

Согласно закону сохранения энергии, скорость υ_1 струи на высоте h будет меньше начальной скорости υ_0

$$\upsilon_1^2 = \upsilon_0^2 - 2gh \qquad \Rightarrow \qquad \upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gh}$$

С учетом этого выражение (6) перепишется в виде

$$F = \rho S(\upsilon_0^2 - 2gh).$$

Расход воды в любом сечении вертикальной струи должен оставаться неизменным *С учетом выражения (1) для расхода воды можем записать*

$$\rho S_0 \upsilon_0 = \rho S_1 \upsilon_1. \tag{7}$$

Сокращая в (7) на плотность жидкости, приходим к уравнению *неразрывности струи*, смысл которого понятен: скорость движения жидкости в струе больше там, где ее поперечное сечение меньше (в местах сужения)

$$\upsilon_0 S_0 = \upsilon_1 S_1.$$

Отсюда следует, что непосредственно перед столкновением с бруском площадь поперечного сечения струи увеличивается (см. рис 3) до значения

$$S_1 = \frac{\upsilon_0 S_0}{\upsilon_1} = \frac{\upsilon_0 S_0}{\sqrt{\upsilon_0^2 - 2gh}}. \tag{7}$$

С учетом (6)-(7) находим, что сила давления одной вертикальной струи на брусок в рамках данной модели

$$F = \rho S_0 \upsilon_0 \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gh}.$$

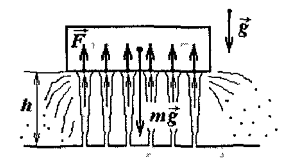


Рис 4

Соответственно, N струй удержат брусок на высоте h в том случае (рис. 4), если

$$NF = N\rho S_0 \upsilon_0 \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gh} = mg \tag{8}$$

Из последнего равенства получим

$$h = \frac{1}{2g}\left(\upsilon_0^2 - \left(\frac{mg}{N\rho S_0 \upsilon_0}\right)^2\right).$$

Поскольку площадь отверстия $S_0 = \pi r^2$, то окончательное выражение для h примет вид

$$h = \frac{1}{2g}\left(\upsilon_0^2 - \left(\frac{mg}{N\rho \pi r^2 \upsilon_0}\right)^2\right). \tag{9}$$

Расчет по формуле (9) дает

$$h = 56\ см$$

Заметим, что рассмотренный принцип действия гидроподушки («воздушной» подушки) широко используется при создании современной техники, способной передвигаться как по суше, так и по воде

Задание 2 «Торможение спутника»

1 При движении спутника, на него действует лишь сила притяжения со стороны Земли (сопротивление пока не учитываем) Она же является центростремительной силой

$$G\frac{Mm}{R_0^2} = \frac{mv_0^2}{R_0} \qquad (1)$$

Отсюда получаем

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_0}} \qquad (2)$$

Период обращения

$$T_0 = \frac{2\pi R_0}{v_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} R_0^{3/2} \qquad (3)$$

2 Полная механическая энергия спутника есть сумма его потенциальной и кинетической энергий

$$E_0 = -G\frac{Mm}{R_0} + \frac{mv_0^2}{2} = -G\frac{Mm}{2R_0} = -\frac{mv_0^2}{2} \qquad (4)$$

Заметим, что полная энергия является отрицательной величиной и по модулю равна кинетической энергии

3 Т к радиус орбиты изменяется несущественно, то можно считать, что на протяжении всего витка на него действует одна и та же постоянная по модулю сила сопротивления $F_C = C\rho_0 S v_0^2$, т е плотность воздуха и скорость в этом выражении считаем постоянными Эта сила будет совершать отрицательную работу $A_C = -F_C\ 2\pi R_0$, что приведет к уменьшению полной энергии спутника Для вычисления относительного изменения скорости, воспользуемся выражением полной энергии спутника через его скорость Тогда закон сохранения энергии примет вид

$$-\frac{mv_0^2}{2} - C\rho_0 S v_0^2\ 2\pi R_0 = -\frac{m(v_0 + \Delta v)^2}{2} \qquad (5)$$

Сразу же отметим, что скорость должна увеличиваться Преобразуем выражения, стоящие в правой части равенства

$$(v_0 + \Delta v)^2 = v_0^2\left(1 + \frac{\Delta v}{v_0}\right)^2 = v_0^2\left(1 + 2\frac{\Delta v}{v_0} + \left(\frac{\Delta v}{v_0}\right)^2\right) \approx v_0^2\left(1 + 2\frac{\Delta v}{v_0}\right) \qquad (6)$$

В последнем преобразовании было учтено, что величина $\left(\frac{\Delta v}{v_0}\right)^2$ очень маленькая, поэтому ее можно не учитывать

Используя такое упрощение и преобразуя уравнение (5), получим

$$\frac{\Delta v}{v_0} = 2\pi R_0 \frac{C\rho_0 S}{m} \qquad (7)$$

Для определения относительного изменения радиуса орбиты, поступим следующим образом Из (2) следует, что

$$v_0^2 R_0 = GM = const \qquad (8)$$

Другими словами, произведения квадрата скорости на радиус орбиты остается постоянной величиной Значит

$$(v_0 + \Delta v)^2 \ (R_0 - \Delta R) = v_0^2 R_0 \tag{9}$$

Совершив, преобразование (6), получим

$$\frac{\Delta R}{R_0} = 2\frac{\Delta v}{v_0} = 4\pi R_0 \frac{C\rho_0 S}{m} \tag{10}$$

Заметим, что в решении этого пункта присутствует существенное упрощение С одной стороны мы считаем силу постоянной, а, т к в выражение для силы входит квадрат скорости, то его мы фактически тоже считаем постоянным С другой стороны мы ищем изменение этой самой скорости На самом деле, с изменением скорости изменяется и сила сопротивления, и точное решение будет несколько отличаться от полученного нами Однако для малых относительных изменений скорости это различие будет несущественным и такой метод решения вполне применим

4 Выражение для тангенциального ускорения легко получить, разделив изменение скорости спутника на величину промежутка времени, за который это изменение произошло, т е на продолжительность одного «витка»

$$a_T = \Delta v \big/ (2\pi R_0 / v_0) = \frac{C\rho_0 S v_0^2}{m} = \frac{F_C}{m} \tag{11}$$

Такой вот получается парадокс Вроде как сила сопротивления, а приводит к ускорению спутника

5 Скорость снижения спутника находится аналогично

$$v_{n0} = \Delta R \big/ (2\pi R_0 / v_0) = \frac{2R_0 C\rho_0 S v_0}{m} \tag{12}$$

Используя выражение (2), получим

$$v_{n0} = \frac{2C\rho_0 S\sqrt{GM}}{m}\sqrt{R_0} \tag{13}$$

Если плотность будет убывать обратно пропорционально корню квадратному от расстояния до центра Земли, то скорость v_{n0} не будет изменяться Поэтому

$$\alpha = -\frac{1}{2} \tag{14}$$

6 Рассмотрим подробнее выражение (11) Выражая плотность, получим

$$\rho = \frac{m}{CS}\frac{1}{v^2}a_T = \frac{m}{CS}\frac{1}{v^2}\frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{15}$$

Таким образом, чтобы найти плотность, надо не знать скорость и ускорение спутника Кроме того, понадобится также определять высоту, на которой находится спутник в данный момент времени

$$h = R - R_0 = \frac{GM}{v^2} - R_0 \tag{16}$$

Подставим известные численные значения постоянных и получим

$$\rho = 100\frac{1}{v^2}\frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{17}$$

$$h = \frac{4{,}00 \ 10^{14}}{v^2} - 6{,}4 \ 10^6 \tag{18}$$

Для вычисления $\rho(h)$ необходимо на приведенном графике взять несколько точек, по значению скорости вычислить высоту полета спутника, а проведя касательные в этих точках, вычислить ускорения, что позволит определить плотность атмосферы Результаты приведены в таблице 1

Таблица 1

$v, \text{м}/\text{с}$	$h, \text{км}$	$\Delta v/\Delta t, \text{м}/\text{с}^2$	$\rho, \text{кг}/\text{м}^3$	$\ln(\rho)$
7780	208	$6{,}6\ 10^{6}$	$1{,}1\ 10^{11}$	-25
7790	192	$5{,}6\ 10^{5}$	$9\ 5\ 10^{11}$	-23
7800	175	$4{,}3\ 10^{4}$	$7{,}0\ 10^{10}$	-21
7810	158	$4\ 10^{3}$	$7\ 10^{9}$	19

Точно провести касательную – сложная задача, поэтому ускорение приведено с двумя (а в последнем случае – с однои) значащими цифрами

Видим что в пятидесятикилометровом интервале высоты плотность изменяется почти на три порядка В таблице также вычислен натуральный логарифм от плотности, что необходимо для определения β На рисунке 1 приведен график $\ln(\rho) = f(h)$ Можно с достаточной долей уверенности сказать, что плотность действительно будет убывать по экспоненциальному закону Из этого графика можно получить величину постоянной β

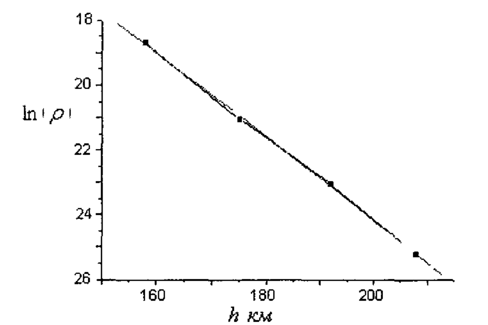


Рис 1

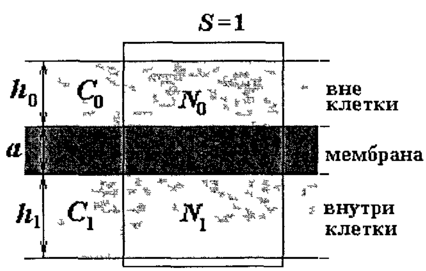
$$\beta = (1{,}3 \pm 0{,}2)\ 10^{\ 1} \text{км}^{\ 1} = (1{,}3 \pm 0{,}2)\ 10^{-4} \text{м}^{\ 1} \quad (19)$$

Задание 3. «Нервное возбуждение»

1 Диффузия

Выделим параллелепипед с единичной площадью основания, боковые стороны которого перпендикулярны плоскости мембраны Изменение чисел части в вне клетки и внутри нее (в пределах выделенного параллелепипеда) описывается уравнениями

$$\frac{\Delta N_0}{\Delta t} = -g(C_0 - C_1)$$
$$\frac{\Delta N_1}{\Delta t} = -g(C_1 - C_0) \quad (1)$$



Учитывая связь меду числом частиц и соответствующей концентрацией $N_{0\,1} = C_{0\,1} h_{0\,1}$, перепишем уравнения (1) в виде

$$h_0\frac{\Delta C_0}{\Delta t}=-g(C_0-C_1)$$
$$h_1\frac{\Delta C_1}{\Delta t}=-g(C_1-C_0)\,,$$

из которых следует уравнение, описывающие изменение разности концентраций

$$\frac{\Delta(C_0-C_1)}{\Delta t}=-g\left(\frac{1}{h_0}+\frac{1}{h_1}\right)(C_0-C_1). \qquad (2)$$

Из этого уравнения следует, что характерное время установления равновесия определяется формулой

$$\tau=\frac{1}{g\left(\frac{1}{h_0}+\frac{1}{h_1}\right)}=\frac{h_0h_1}{g(h_0+h_1)}. \qquad (3)$$

2. Вынужденный перенос и диффузия.

При наличии вынужденного переноса в уравнениях (1) появятся дополнительные слагаемые

$$\frac{\Delta N_0}{\Delta t}=-g(C_0-C_1)-nm$$
$$\frac{\Delta N_1}{\Delta t}=-g(C_1-C_0)+nm\,. \qquad (4)$$

Из этих уравнений следует, что в стационарном режиме (когда концентрации частиц не изменяются со временем) разность концентраций равна

$$\Delta\overline{C}=C_1-C_0=\frac{nm}{g}. \qquad (5)$$

3. Электрическое поле.

Используя известные формулы для напряженностей полей, создаваемых плоским слоями, можно записать выражение для напряженности однородного поля внутри мембраны

$$E=\frac{e(C_1h_1-C_0h_0)}{2\varepsilon_0}. \qquad (6)$$

где e - заряд электрона, положительное направление поля - из клетки наружу.
Тогда разность потенциалов равна

$$\Delta\varphi=Ea=\frac{ea(C_1h_1-C_0h_0)}{2\varepsilon_0}. \qquad (7)$$

4. Перенос ионов.

Будем считать, что концентрация ионов внутри клетки превышает их концентрацию вне ее. В этом случае уравнения баланса числа частиц принимают вид

$$\frac{\Delta N_0}{\Delta t}=-g(C_0-C_1)-nm+bC_1\Delta\varphi$$
$$\frac{\Delta N_1}{\Delta t}=-g(C_1-C_0)+nm-bC_1\Delta\varphi\,. \qquad (8)$$

В стационарном режиме эти уравнения равносильны, поэтому для определения стационарных концентраций, к ним необходимо добавить условие постоянства числа частиц

$$C_0 h_0 + C_1 h_1 = C_e (h_0 + h_1). \tag{9}$$

Теперь из уравнений (7)-(9) нам необходимо найти выражение для разности потенциалов $\Delta\varphi$. Для упрощения расчетов все концентрации, фигурирующие в этих уравнениях, выразим через искомую разность потенциалов. Для чего запишем

$$\begin{gathered} C_0 h_0 + C_1 h_1 = C_e (h_0 + h_1) \\ C_1 h_1 - C_0 h_0 = \frac{2\varepsilon_0}{ea} \Delta\varphi \end{gathered}.$$

Теперь складывая и вычитая эти выражения, получим

$$\begin{gathered} C_1 = C_e \frac{(h_0 + h_1)}{2h_1} + \frac{2\varepsilon_0}{eah_1} \Delta\varphi \\ C_0 = C_e \frac{(h_0 + h_1)}{2h_0} - \frac{2\varepsilon_0}{eah_0} \Delta\varphi \end{gathered}.$$

Подставим эти выражения в уравнения (8) в стационарном режиме, в результате получим квадратное уравнение для определения стационарной разности потенциалов

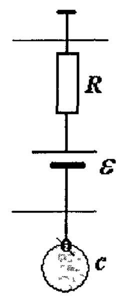
$$-g\left(C_e \frac{(h_0 + h_1)}{2h_0} - \frac{2\varepsilon_0}{eah_0} \Delta\varphi - C_e \frac{(h_0 + h_1)}{2h_1} - \frac{2\varepsilon_0}{eah_1} \Delta\varphi \right) - nm + b\left(C_e \frac{(h_0 + h_1)}{2h_1} + \frac{2\varepsilon_0}{eah_1} \Delta\varphi \right) \Delta\varphi = 0$$

Путем алгебраических преобразований преобразуем его к стандартному виду

$$\frac{2\varepsilon_0 b}{eah_1} (\Delta\varphi)^2 + \left(\frac{2\varepsilon_0 g (h_0 + h_1)}{eah_0 h_1} + bC_e \frac{(h_0 + h_1)}{2h_1} \right) \Delta\varphi - \left(nm + C_e g \frac{h_1^2 - h_0^2}{2h_0 h_1} \right) = 0 \tag{10}$$

Положительный корень которого и даст искомую разность потенциалов.

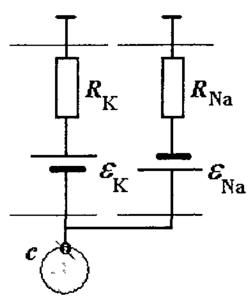
5. Эквивалентная схема.

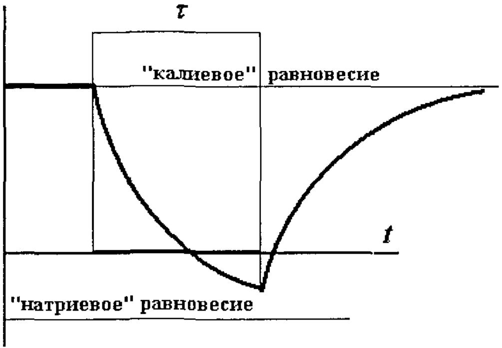


Конечно, указанную эквивалентную схему следует дополнить электрическими емкостями слоев жидкости вне и внутри клеток. Удобно моделировать эти слои не конденсаторами, а уединенными проводниками. Если же принять потенциал вне клетки равным нулю, то можно «обойтись» и одним уединенным проводником.

В такой схеме очевидно, что эквивалентна ЭДС должна быть равна значению равновесного потенциала, определяемого уравнением (10), а величина RC соответствует времени установления равновесия, примерно определяемым формулой (3).

6. Когда натриевые каналы закрыты, то разность потенциалов определяется равновесной разностью потенциалов, обусловленной ионами калия (решением уравнения (10)). При открытии натриевых каналов В эквивалентную схему следует включить ЭДС, моделирующую натриевые насосы. В этом случае мембрана постепенно будет изменять свою поляризацию на противоположную, а разность потенциалов стремиться к равновесию, определяемому наличием двух ЭДС, то есть их разностью. Время перехода к этому равновесию будет меньше, так как сопротивление мембраны уменьшится. После закрывания натриевых каналов, мембрана система будет возвращаться к исходному состоянию с большим временем перехода. Схематически этот процесс показан на рисунке.




τ
"калиевое" равновесие
t
"натриевое" равновесие